译者的话

本书译自«问题与思考»(«Задачи и размышления» 1974年)第二部分"又一百个问题"(Ещё сто задач)。原书是把著名的波兰数学家古伏·史坦因豪斯(1887～1972年)所写的一些通俗读物合编而成的。

作者以前著有«一百个数学问题»(中译本也由上海教育出版社出版)。仿照这本书的体例，俄文编译者在作者逝世后，从分散于波兰«数学»杂志上的问题中编了这又一百个问题。对这些问题，基本上引用了这本杂志的读者所提出的解答。

这些问题的形式是简单的，涉及的知识面是广泛的，而且是相当有启发性的——从初等的形式出发，引导读者灵活运用中学数学知识，以及进入数学王国的某些领域。仔细地研读这些问题，对提高学生的数学水平无疑是有益的。虽然除两个问题外都附有解答，但译者希望在读者中会出现新的更好的解答，并且能解决那两个遗留问题(第11题、第97题)。

还要说明一点，这不是一本通常的习题集。可能有些读者对某些问题暂时还不会有彻底的了解，这正是史坦因豪斯的三本小册子(«数学万花镜»«一百个数学问题»及本书)的共同特点：随着读者的知识水平的提高，每隔一定时间重读的话，会得到一层深一层的理解。

对原文除改正了一些刊误或错误外，只在个别地方作了删节，其它都照译。此外，为帮助部分读者阅读，加了一些注释。限于译者的水平，无论是译文或注释都会有不当之处，望批评指正。

庄 亚 栋 1979年1月15日

目　录

一、点阵，不等式和序列

1. 圆上的整点 在直角坐标系内，x 表示点 (x, y) 的横坐标，y 表示纵坐标. 平面上坐标只取整数值的所有点 (x, y) 的集叫做整点阵（整数格，或简称为格）. 整点阵的点通常叫整点.

证明：以点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 为圆心的圆至多通过一个整点，就是或者通过一个整点，或者不通过任何整点，但不可能通过两个或两个以上的整点.

2. 圆内的整点 考虑落在圆 K 内（由圆 K “包围”）的整点. 在圆 K 上的整点不算在 K 内.

证明：存在这样的圆，它的内部有一个整点，两个整点等等. 一般地，对任何 n（自然数或 0），可以给出一个内部恰好有 n 个整点的圆.

3. 圆和整点阵 作内部分别有下列各个整点的最大的圆：(1) 0 个；(2) 1 个；(3) 2 个；(4) 3 个；(5) 4 个；(6) 5 个. 计算各种情况的圆的直径.

4. 在点阵里移动的圆 存在这样的圆，随着它在点阵内位置的不同，在其内部可以有 1, 2, 3, 4 个整点. 换句话说，存在直径固定的圆，对它来说，这四种情形（而且只有这四种）都可以出现. 这样的圆的直径应该满足什么条件？

内部含有 4 个整点（在某个位置）的最大的圆，可以移动到使它内部出现 9、8 或 7 个整点的位置. 能不能把它移动到使它内部出现 5、6 或 10 个整点的位置？

5. 四个数 用几何方法证明：满足条件

$$0<a<b<c<d,\ a+d=b+c,\ a^2+d^2=b^2+c^2$$

的四个数 a，b，c，d 不存在.

6. 两个集 把区间[0, 1]分成不相交的两个集 A 和 B（例如，把坐标 x 为有理数的所有点作为集 A，把坐标 x 为无理数的所有点作为集 B）.

在[0, 1]上定义一个连续函数 $f(x)$，使对属于集 A 的 x，函数值 $f(x)$ 属于集 B，而对属于集 B 的 x，函数值 $f(x)$ 属于集 A.

能作出这样的函数吗？

7. 近似估计 说明数

$$x=\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\cdots}}}}$$

满足哪一个不等式：是 $x>3$，还是 $x<3$？

8. 不等式 证明：对任意整数 p，$q(q\neq 0)$，下面的不等式成立

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{3q^2}.$$

9. 连分数 序列 $\{a_n\}$ 是自然数的某个排列（每个自然数在 $\{a_n\}$ 里出现且仅出现一次）. 用 $\xi(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ 表示连分数

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}.$$

证明：ξ 不可能取闭区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ 中的任何一个值. 在开区间 $(0, 1)$ 里，存在着 ξ 的其他"不可达到的"值吗？

10. 数列 求正数列 a_0，a_1，a_2，$\cdots$，它满足 $a_0=1$ 及递推关系式

$$a_n - a_{n+1} = a_{n+2}, \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

证明：这样的数列只有一个.

11. 正方形 能不能作一个正方形，它的边长是整数，并且在它所在的平面上能指出一个点，使该点到正方形四个顶点的距离都可以用整数表示.

注 我不知道这个十分困难的问题的解答.

12. 有趣的根式 证明：对任何自然数 n，式

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$$

的值小于 2.

13. 特殊性质的三角形 边长为整数 a、b、c，底边上的高等于底边的三角形存在吗？

14. 丢番图①方程 求四个自然数 a, b, c, d，满足方程

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

及条件 $a<b<c<d$.

a, b, c, d 能是素数吗？

二、平面，多边形，圆

15. 沿平面滚动的四面体 设想有一个四面体，它的各个面是边长为 k、l、m 的全等三角形. 我们把它绕着底面的棱沿平面滚动. 作为旋转轴的棱，我们每一次都独立地选择（即相邻两次转动绕不同的底棱进行——译者）.

沿平面随便滚动多久的四面体，总能沿着与原来的道路没有一个地方重合的道路，返回出发位置吗？（“不重合”的道

① 约公元三世纪时的希腊数学家. 丢番图方程即不定方程. ——译者

路是指，如果把这个四面体的面随便涂上什么颜色，并且认为滚动时，每个面都在平面上留下了痕迹，那末只有最后一个痕迹与第一个痕迹重合，而其它所有痕迹无论何处都不重迭.）

16. 大圆和小圆 半径为 3 cm 的小圆与半径为 6 cm 的圆外切. 离小圆的圆心 1 cm 处"固定"一个点. 当小圆沿大圆无滑动地滚动时，这个点画出了一条闭曲线.

(1) 证明：内接于这条曲线的等边三角形 T 可以这样地移动，使它的三个顶点同时描出整条曲线；

(2) 计算三角形 T 的边长；

(3) 当 T 的顶点如条件(1)所说那样转动时，求 T 的中心的轨迹.

17. 直尺和两个圆 考察平面上两个不同半径的同心圆. 很明显，它们可以用长度为半径之差的直尺(直线段)的端点同时画出. 同样显然的是，选择适当的线段，我们能在平面的任意位置，(用线段的端点)同时作出两个相同的圆.

为了使直尺的端点能同时画出两个圆，圆的半径、圆心距和直尺的长度应该满足什么样的充分必要条件？

18. 内接平行四边形 设 G 是凸区域①，它的面积也用字母 G 表示. 我们所说的凸性是指严格意义下的，即假定区域 G 的边界既不包括任何直线段，也没有尖点. 换句话说，在 G 的边界上每个点处，都有一条而且只有一条切线，并且每条切线与 G 的边界有且仅有一个公共点. 设 $PQRS$ 是区域 G 的外切四边形中面积最小的一个，A, B, C, D 分别是它的四条边 PQ, QR, RS, SP 与区域 G 的边界的切点.

证明：$ABCD$ 是面积大于 $G/2$ 的平行四边形.

---

① 如果连接区域 G 中任意两点的线段在 G 内，那末称 G 是凸区域. 凸区域的边界叫凸曲线. ——译者

19. 外切平行四边形 设G是上题所说的凸区域,$ABCD$是G的所有内接四边形中面积最大的一个. 过A, B, C, D作G的切线,得到四边形$PQRS$.

证明: $PQRS$是G的面积小于$2G$的外切平行四边形.

20. 空间五边形 在三维空间里,能作一个各边相等,各个角是直角的闭五边形吗?

21. 带直角的等边"奇数边形" 在三维空间里, 作一个有奇数条边的闭多边形, 它的各边相等, 各个角是直角, 可能吗?

22. 正方形和曲线 作一条光滑的凸闭曲线,它不是圆,但随便从该曲线上哪一点出发,作它的外切正方形时,这些正方形的面积不变. 换句话说, 这条曲线的外切正方形可以不改变大小地绕着它转动, 并且正方形的各条边仍然与曲线相切(圆是有这种性质的).

23. 重心 在$\triangle ABC$的各顶点处放置了质点: 放在A点的质点,它的质量等于BC边的长度, 放在B点的质点, 它的质量等于AC边的长度, 放在C点的质点, 它的质量等于AB边的长度.

证明: 这三个质点形成的系统的重心与$\triangle ABC$的内切圆心重合.

24. 外接圆 通过矩形四个顶点的圆, 是包含这个矩形的所有圆中面积最小的一个. 内切于矩形的最大的圆有无数个. 我们把包含平面图形F的圆里最小的一个,叫F的外接圆,把整个地含于F内的圆里最大的一个,叫F的内切圆.

证明: 不管图形F的形状如何, 只要它有界①, 总只有

---

① 若平面图形F能整个地含于某一个圆内, 则称F是有界图形, 否则叫无界图形. ——译者

一个外接圆.

25. 锐角三角形 能不能用垂直于锐角三角形三边，且交于三角形内某个点的线段，把三角形分成三个相等的部分？

26. 圆内的点 平面上有十个点在一个圆内，移动各个点，使任两点之间的距离减小.

能不能作一个半径较小的圆，使移动后的十个点都在圆内？

在平面上某个圆内任取 n 个点(n 是任意自然数)，把这些点移动，使任意两点之间的距离变小.

是否总能作一个半径较小的圆，使得在新位置的所有的点都在圆内？

27. 铅丝三角形 用一根均匀的铅丝做一个三角形 PQR. 以它各边的中点为顶点得到一个新三角形(边长减小一半)，然后用直线段连接三角形 PQR 的重心与小三角形的顶点.

证明：这些线段平分小三角形的内角.

28. n 边形 为使以数 b_1, b_2, $\cdots$, b_n 为边长的 n 边形(各边及其长度的记号相同)存在，b_k 应满足什么样的充要条件？

29. 再谈 n 边形 设数列 $b_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 满足上题所说的充要条件，那末保持边的次序不变，我们可以在以 b_k 为边的所有 n 边形中，作一个有最大面积的 n 边形.

最大面积与数 b_k 的次序有关吗？换句话说，如果保持各边仍是 b_k 不变，但改变它们构成 n 边形时的次序，相应的最大 n 边形的面积改变吗？

30. 内接 n 边形 证明：如果存在边长为 $b_k(k=1, 2, \cdots, n)$的 n 边形，那末也存在边长为 b_k、次序也相同的内

接于某个圆的n边形.

31. 平面的剖分 一个圆把平面分成两部分，用两个圆可以把平面分成四部分. 再作一个圆——第三个圆，我们把平面分成了八部分.

能不能用四个圆(分布在同一平面上)把平面分成16部分?

32. 再谈平面的剖分 证明：对任意自然数n，在平面上存在n个圆，把平面分成$n(n-1)+2$部分.

用n个相同半径的圆总能把平面分成$n(n-1)+2$部分吗?

33. 六边形的面积 证明：边长小于1的六边形的面积小于2.6.

34. 卵形里的点 已知平面上有n个点在卵形①内(在内部而不在它的边界上). 可以用线段把卵形这样地分隔成若干部分，使得：第一，在每一部分内只有这n个已知点中的一个；第二，任何一部分的“主人”到“自己的”点，要比到“别人的”来得近；第三，多边形“篱笆”只包含边界与卵形边界重合的曲线部分(即篱笆如果有曲线部分的话，只能是卵形边界的一部分. ——译者).

在卵形内部，由有L节的折线网形成篱笆. 当已知n时，L的最大值是多少?

35. 圆上的23个点 圆K的周长是50 cm，在K上任意地分布着23个点，这些点形成集Z(这样，集Z有23个不同的元素).

以A和B为端点，长7 cm的弧L，沿圆K顺时针方向运动. 需要证明下述两个结论.

① 所谓卵形，是指有界闭凸区域. 例如，圆形，椭圆形都是卵形. ——译者

结论 I. 在某一时刻，弧 L 转到恰好有 Z 的三个点属于它的位置.

结论 II. 在某一时刻，弧 L 转到恰好有 Z 的四个点属于它的位置.

注 端点 A 算作属于弧 L，而端点 B 不属. 根据惯例，所谓“弧 L 恰好包含集 Z 的 n 个点”，是指弧 L 包含集 Z 的不与端点 B 重合的 n 个点.

36. 两个十字形 互相垂直平分的两条线段形成的图形，叫做十字形. 线段本身叫十字形的横杠，交点叫十字形的中心. 中心不同，但横杠两两平行的十字形叫做平行的十字形.

如果多边形的内角都小于 180°，则叫做凸多边形(因为任何一个内角都不可能等于 180°).

需要证明，不可能作出这样的凸多边形，使得连接它的某些顶点能成为两个平行的十字形(多边形的顶点数可以任意大).

37. 圆心 某圆内部含有基本正方形边长为 1 的正方形网格的 10 个格点，它的面积是 10 平方单位，试计算它的圆心坐标 x_0, y_0. 圆心坐标应该满足不等式 $0 \leqslant x_0 \leqslant y_0 \leqslant 1$.

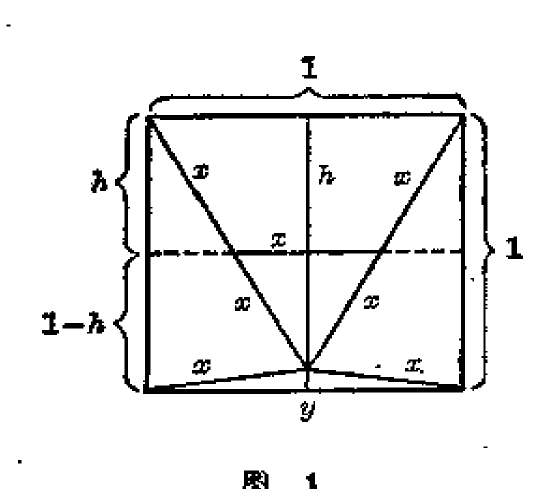


图 1

38. 正方形内的七个点 需要在单位正方形内放置七个点，四个在顶点，三个在内部(图 1). 两两连接这七个点，得到 21 条线段. 图 1 上只画了七条最短的线段(每条这样的线段和它的长度都

用 x 表示)．字母 h 的含义从图上是清楚的，y 表示底边与正方形下底重合、两侧是 x 的三角形的高．

计算线段 x、h 和 y 的长度．

三、空间，多面体，球

39．四面体 有六根不同长度的小棒．无论按什么次序，拿这些小棒总能搭成四面体的骨架．能得到多少种不同的四面体？

40．"被戳穿的"立方体 用 27 个相同的小立方体组成一个大立方体．作一条直线，它"戳穿"的小立方体的个数最多，并且求出这个数字．所作的直线不应该与这些立方体的棱相交．

41．用球填满空间 我们已经知道，空间里同样大小的球形成的最紧密结构①．在单位球形成的这样的结构中，球与球之间有大、小两类空隙．这些空隙可以用不同半径的两种小球充填，大的空隙里放大的，小的空隙里放小的．两种半径应选择得使这些球紧紧地嵌进空隙，不能活动．

每一个较小半径的球与单位球的切点有多少个？较大半径的球呢？它们的半径各是多少？

42．导出多面体 任取一个多面体，用下述方法作另一个多面体，它叫做原多面体的导出多面体：

过球 K 的球心作平行于已知多面体的各界面的平面．这些平面与球 K 的表面交成大圆弧，它们形成球面多边形．把

① 见史坦因豪斯著《数学万花镜》第 82 题，裘光明译，中国青年出版社，1958 年版。——译者

这些球面多边形的每一条边用弦代替，我们得到了内接于球 K 的导出多面体的棱．如果原多面体有两个平行界面，那末它们在球 K 上只对应一个大圆．

作下列多面体的导出多面体，并确定它们的形状．

(1) 正四面体；

(2) 立方体；

(3) 正八面体；

(4) 正十二面体；

(5) 正二十面体．

43．曲面上点之间的距离 在闭凸(不凹)曲面上的任两点之间，可作一条连接这两个点的最短的弧．(在连接两个已知点的弧中，可能有若干条最短的．例如，在球面上，直径的两个端点之间可以用无数条大圆弧连接．)

曲面上任两点 P、Q 之间的距离，定义为连接 P、Q 的最短弧的长度．尤其是，我们能够度量曲面上已知点 P 与任一点 X 之间的距离．

在曲面的所有点中找一个离已知点 P 最远的点 S(也许不是唯一的)．能否假设点 P 和 S 至少总能以两条最短弧连接？

求证：对于某些四面体，这样的假设已经不正确．

44．闭曲面 用平面截某个闭曲面得到的截口都是圆(截口只有一个点时，把它看作半径为 0 的圆)．

证明：这个闭曲面是球．

45．凸曲面 能不能作一个不是球的闭凸曲面，使通过适当选择的某条直线的平面，与这个曲面的交线都是圆？

46．立方体里的点 所谓数 u、v、w 算术无关，是指除 $(0, 0, 0)$ 以外，对随便什么数組 (p, q, r)，关系式

$$pu+qv+rw=0$$
不成立。

设想有一个立方体，它的棱平行于直角坐标系的轴，有一个质点 M 在它里面不停地运动(没有外力作用于 M)． 在初始时刻 $t=0$，点 M 的速度不等于 0，随后按照“入射角等于反射角”的规律，在立方体的壁之间不断弹射． M 的速度的三个分量 u、v、w 是算术无关的．

证明：动点 M 无论何时都不会返回出发位置．

47．多面体 在正多面体中，哪些有下述性质：在它的界面上能适当地写上自然数(每个面上写一个数，除此之外，对这些数没有限制)，使得相邻界面上的数互素，不相邻界面上的数有不等于 1 的公约数．

48．直线和三个球 三个球有公共点 P，但通过 P 的任何直线都不是这三个球在 P 处的公切线．

证明：这三个球还有一个公共点．

49．球面上的四个点 用直线段两两连接球面上的四个点，得到一个四面体． 证明：当任意两个点之间的距离相等时，这个四面体的体积最大．(即正四面体时体积最大)

50．四条直线和第五条直线 在三维空间内，作四条既不平行又不相交的直线，使任何第五条直线不会与这四条直线都相交．

51．立方体的剖分 把立方体分成六个四面体，其中三个相等，另三个与这三个的镜面反射相等．

52．四面体和立方体 对四面体的铁丝模型(用六根铁丝作棱的骨架)，可以用纱线连接不同棱上的各对点而填满为实体．

考虑另一个立体的铁丝模型，即由 12 条棱作成的立方体

的骨架．能不能用上述方法把它填满为实体？

53．分田　需要把一块正方形田三等分．不难把它分成三块矩形，使分界线的总长度为该正方形边长的5/3．

如果不把这块田分成矩形块，能不能缩小分界线的长度？

54．空间里的射线　从立方体一个顶点出发的三条棱，彼此构成90°角．在三维空间里，也能找到四条射线，它们从同一个点出发，并且彼此构成等角．试计算这个角的大小．在三维空间里，能不能指出有这些性质的五条射线？

55．正二十面体　从正二十面体的中心看它的一条棱的视角有多大？

56．球的剖分　点C是正四面体的顶点，同时又是球S的球心．这个球如此地小，使得从顶点C出发的四面体的三条棱都与它相交．特别地，这个四面体把球分成两部分：大的部分在四面体外，小的部分在四面体内．

这两部分之间的比值是多少？

四、实际问题和非实际问题

57．称量　需要把五个不同重量的物体，按重量减少的次序排列．只能用最简单的没有砝码的天平，把要比较的物体放上去比较哪一个重．

为了用最佳方案解决问题，即要使称量次数最少，应该怎么做？此时称多少次？

58．烟草问题　甲、乙、丙三人生活在一起，他们公用价值120兹罗提（波兰货币——译者）的大包烟丝．若丙不抽

烟，则这包烟丝够甲、乙两人用 30 天．若乙不抽，则甲、丙两人可用 15 天．若甲不抽，则乙、丙两人 12 天用完这包烟丝．若三个人一起抽，这包烟丝可以用多少天？每个人应付多少钱？

59．车间的宽度 车间里，两根枕木上放着 15 m 长的铁轨，它与枕木的轴垂直，且有一端与墙接触．枕木的轴平行于与铁轨接触的墙，从这墙到最近的枕木距离 5 m．推动铁轨（设枕木与地板及铁轨与枕木之间没有滑动）时，枕木也滚动，并且轴向不变．如果当铁轨的一端碰到车间对面的墙壁时，它的另一端恰好在一根枕木的轴线上，求车间的宽度．

60．弗劳兹拉夫游戏 游戏参加者随意挑选一个满足以下两个条件的问题：(1) 随便哪个参加者都不知道怎么精确地回答它；(2) 它是用数回答的．例如可以问："我们做游戏的这座房子有多少 cm 高？"每个参加者在一张纸上写出自己的回答，签上自己的名字．然后把纸集中起来，计算所有的数的算术平均值．答案最接近这个平均值的人得胜．两个事先串通的同伙可以大大增加得胜的机会，怎么串通法？为减少发生这种情形的危险，应该怎样改变弗劳兹拉夫游戏的上述取胜规则？

61．水盆和地球仪 在水平支架（桌面）上放着白铁皮的球缺形水盆，盆里放着一个小地球仪．通过地球仪和盆的切点的垂线，同时也是这个球缺和地球仪的对称轴．通过垂直于这根公共轴的水平线，可以把地球仪上每一个指定的点投影到水盆上．在这样的映射下，标志在地球仪上的各个地区以稍微扩大了的形状映到水盆上．

求证：当从地球仪投影到水盆上时，所有地区的面积增

大同样的倍数.

62. 网袋里的球 用长 10 cm 的 12 根细线结成一个网袋(正方体形状——译者). 向袋里放一个球, 设想这个球可以胀大, 直至细线所能容许的程度. 结果, 这个球把网袋张紧, 各条细线紧贴在球面上, 并且网袋的八个结点分布在球面上, 形成一个立方体的顶点.

计算放在网袋里的球的最大体积.

63. 海上演习 演习时, 大洋里军舰 A、B、C 的指挥员接到了海军上将的简短命令: 于最短时间内集中在一处. 由于不断进行无线电联络, 舰长们知道收到命令时各舰之间的距离为 $AB=100$ 海里, $AC=200$ 海里, $BC=220$ 海里. 各舰的最大速度: A 为 15 节, B 为 20 节, C 为 12 节. (1 节=1 海里/小时——译者)

怎样执行海军上将的命令?

64. 伪钱币 有四个外形完全相同的钱币. 它们每个应重 5 克, 但已知有一个不是 5 克重.

用一架等臂天平和一个五克重的砝码, 你能不能称两次就确定伪钱币? 它比真的重还是轻?

65. 道路网 需要用道路网把四个城市 A、B、C、D 连接起来. 由于筑路的经费最好尽量缩减, 一般说来, 道路网应该有交叉口.

求证: 经济的道路网, 它的交叉口总不多于两个.

66. 女裁缝 某男裁缝决定开设缝纫店. 他有五部不同种类的、供不同用途的缝纫机. 在报上登了广告以后, 有七个女裁缝应征候选. 男裁缝让每个人在五部机器上各干了一小时的活, 然后以兹罗提为单位估计各人的劳动生产率(取成品价值和所用材料价值之差). 结果得到下表:

女裁缝 \ 机器	I	II	III	IV	V
A	4	3	5	8	12
B	10	4	6	8	8
C	15	1	12	11	11
D	11	9	5	8	14
E	1	10	3	9	12
F	4	7	11	3	2
G	5	2	2	10	1

应该录用哪几个人？对被录用的女裁缝应如何分配机器？

67．追捕 6艘警察的汽艇包围了走私者的摩托艇．汽艇在正六边形的各顶点处，而摩托艇在正六边形的中心．摩托艇的最大速度是25节，汽艇是20节．走私者听到警察队长命令自己的人始终向摩托艇方向前进．

走私者能脱离包围而逃脱追捕吗？如果能够的话，怎么逃？

68．宇航员 落到一个小行星上的宇宙航行员，从他软着陆的地点 P_0 前往离它最远的点 P_1．到达 P_1 略事休息后，宇航员前往离它最远的点 P_2．他正打算继续这种不平常的旅行，忽然明白，由于 $P_2 \neq P_0$，所以他所走的路线无论何时都不会回到 P_0．为什么？

69．矿湖 某矿湖有着与众不同的特点：随便游艇处在它的哪一个点，游客总不能一眼就看到整个湖．因此，希望欣赏整个湖泊的旅游者，不得不常改变自己的“观测所”的位置．

证明：如果在湖上找到了一点，从这点可以立刻把整个湖面一览无遗，那末所有这样的点填满某个凸区域．

70．地图 学校里的墙上挂着一张矩形的地图．某学生有一张类似的地图，它是把墙上的图精细地画在矩形透明纸

上的较小的摹本．在自己的同学面前，这个学生夸耀说：不管多少次，也不管在什么位置，把这幅摹本复到学校的地图上去的话，总可以在这张图上找到一个点，使学校地图上与它重合的点对应于同一个地方．甚至在不是正放，而是斜放（即两张图的边缘不平行）时也如此．

这个幸运的摹本所有者的结论对吗？

71．罐头和细线 圆柱形罐头的高等于底面半径．把罐头用一根线紧紧地扎起来，这根细线位于圆柱的轴截面上，并且通过它下底边上的两个豁口．

不解开细线，也不拉断它，能把它从罐头上取下来吗？细线处于何种状态：稳定还是不稳定？

72．血型 早在1919年，朗特斯坦涅尔，扬斯基和莫斯确定了人们的血型有四种类型，O，A，B，AB．知道了病人的血型后，为了把血安全地输给病人，需要预先知道输血者的血型．我们用符号 $X \to Y$ 表示命题"X 血型的人总可输血给 Y 血型的人"，那末输血法则可表示为：

Ⅰ．对每个 X，$X \to X$．

Ⅱ．对每个 X，$O \to X$．

Ⅲ．对每个 X，$X \to AB$．

Ⅳ．不能从Ⅰ～Ⅲ得到的其它所有关系式 $X \to Y$ 都是假的．

证明：

(1) 法则系统Ⅰ～Ⅳ不矛盾；

(2) 若法则Ⅰ～Ⅳ真，则对任何 X、Y、Z，由 $X \to Y$ 和 $Y \to Z$ 可得 $X \to Z$；

(3) 从法则Ⅰ～Ⅳ可得 $(\overline{A \to B})$，即关系式 $A \to B$ 的否定．

注 法则I～IV中的量词"对每个"和"所有"应理解为X和Y的位置可用四种血型O、A、B和AB中任何一种代替.

73. 再谈血型 三个医科大学生决定鉴定自己的血型，但不用别人的血或现成的血清. 为了判定命题X→Y(这个符号的含义见上题)是否正确，只要有X、Y的一滴血就够了. 我们不需要知道随后把这些血怎么办(虽然医科学生是知道的). 结果，他们鉴定了两个人的血型，但不能鉴定第三个人的. 经过一番思考，大学生们得出结论说，如果他们已经知道了第三个大学生的血型，那末他们就能鉴定任何病人的血型. 而且，为了鉴定病人的血型，他们不需要那两个已经知道了血型的大学生的血.

怎么解释这个似乎难以置信的结论?

74. 三谈血型 菲利克斯·伯恩斯坦——以集论方面的工作而知名的数学家——建立了血型O、A、B、AB的遗传性的第一个定律. 设父亲的血型是A，母亲的血型是AB，我们在单个字母A的右边写上字母O，以两个字母组合的符号AO表示父亲的血型. 为了得到孩子的血型，我们需要从父、母亲的血型AO和AB中各取一个字母，列出两个字母的全部组合.

得到了符号AA、AB、OA、OB之后，应该简化：两个相同的字母AA只取一个(A)，凡遇到字母O的组合总把O去掉. 结果得到四个符号，A、AB、A、B. 伯恩斯坦的定律断言：子女的血型应该属于三种血型A、B、AB之一(不可能是O型).

上面所说的规则(对单个字母加上字母O，从双亲的血型符号构成两个字母的组合，两个相同字母的组合里去掉一个

字母，而字母O总是从组合里去掉的)确立了——不仅在这个例子里，而且在一般情形——所谓血型遗传性的表现型理论.

既熟悉血型遗传性的表现型理论，又熟悉输血法则(见第72题)的两兄弟知道：他们两人不能互相输血，但他们的母亲可以输血给他们.

他们的姐妹能代替母亲成为两兄弟的输血者吗？

75. 圆里的方块 有64块边长为10 cm的正方形块.为了使方块都能放进半径为50 cm的圆内，应当怎么办？存在不存在能装进这64个方块的半径更小的圆？

76. 再谈方块 在半径为20 cm的圆内最多可以放置多少个边长为10 cm的方块？

77. 古老的塔 有一座象垂直放着的柱形的古老的塔——古代建筑学的珍贵的遗物.由于保护者用圆形的栅栏把它围了起来，所以只能在一定的距离观察它.栅栏的半径是10 m.沿栅栏绕着塔走，游览者的水平视角(看塔的两侧的水平视线之间的夹角)始终不变地是直角.在个别地方，栅栏只离开塔1 m，而在其它地方，栅栏和塔之间的距离较大.最大的距离为2 m.

需要确定塔的水平截面的形状和它的面积.

78. 跷跷板 把一块板搁在横放在地上的大木头上，就成了孩子们喜欢玩的跷跷板.如果板面是粗糙的，而且大木头的表面也没有加工过，那末板与木头之间不会有滑动.不难验证，如果大木头是圆柱形的，那末游玩时板的两端的轨迹不是直线.

求证：不仅对截面是圆的木头，而且对任何大树段，跷跷板两端的轨迹都不会是直线.

五、萨拉杰克博士的新数学趣事

79. 汽车问题 某汽车司机向同事借了3公斤煤油和5公升汽油，一起倒进了一个桶里，正好满到桶边，并且把它称了一下．几天以后，同事来取桶，这个司机倒进了3.5公升煤油和4公斤汽油，桶又满到了边上，而且重量与第一次一样．司机还给他同事的汽油(以及煤油)与借来的是同类的．

汽油和煤油的密度可以用普通的除法计算，不需要列出任何方程，但萨拉杰克博士知道得要多得多．他断言：

(1) 司机们不善于区分煤油和汽油；

(2) 对于现代的汽车发动机来说，桶里的这种较重的燃料是不合适的；

(3) 他，萨拉杰克博士本人，能这样地解决问题：得到较轻的、连飞机发动机也可以使用的混合燃料．

他是怎么办的？

80. 魔书 萨拉杰克博士有一个图书馆，其中有一本书是他特别珍爱的，只在有一天对自己的学生说起过．

——把这本书随便翻到哪一页，告诉我那里写着什么数！——博士吩咐说．顺从的学生说出了数4783．

——现在，随你翻多少页，告诉我你翻到的那一页上写着什么数！

执行了这个命令后，学生说出了数1955．

——现在，随你取两个四位数！——博士继续说．

学生选了2079和7081．

——请你从第一个得到的数(即从4783)开始，到第二个

(到 1955)为止，按照书上的次序，大声地读出 2079 和 7081 之间的所有的数.

顺从的学生也完成了这个不容易的任务. 他必须念完 2000 个左右的数，从中去掉大约 1000 个.

然后，萨拉杰克博士叫学生检查一下，剩下来的数所形成的数列相邻项之差等于什么. 结果，这些差仅仅只取三个不同的值!!!

你能不能以一个不大的模型(萨拉杰克博士的书里有一万个数)为例，说明这本魔书的秘密在哪里?

81. 砝码 萨拉杰克博士有两个学生时代的朋友，一个在不久以前开了个小铺子，另一个开了个不大的店. 小铺子的主人经营各种(散装的)食品杂货，咖啡，米，面粉等等，而店主经营的是论个出卖的黄瓜，柠檬，青鱼等等，价格随重量而定.

萨拉杰克博士有两套砝码，一套是 10、30、90 和 270 克的，另一套是 10、20、40、80 和 160 克的. 把这两个朋友请来以后，萨拉杰克博士答应把这两套砝码送给他们，不过，他们每人只能取对自己最便利的那一套.

小铺子的主人和店主各取哪一套?

82. 奇怪的团体 某个人断言，他能挑选下列情况的 12 个人(包括他自己)组成的团体举行晚会:

(1) 每个出席者认识五个成员，但不认识其它的;

(2) 每人加入一个互相认识的三人小组;

(3) 在出席者中间找不到彼此全都认识的四个人;

(4) 在出席者中间找不到彼此全都不认识的四个人;

(5) 每人加入一个彼此不认识的三人小组;

(6) 对每个成员来说，在不认识他的人中有这样的人，他

和这个人在这个团体里没有共同的熟人.

听到这些以后，萨拉杰克博士宣称，他能组织满足条件(1)、(2)、(4)、(5)的团体，其中每个人认识且只认识六名成员，而且每个人有个熟人一起认识全体同事(即这样的熟人，他能介绍他认识所有原来不认识的人).

萨拉杰克博士和他的无名的先驱者的结论正确吗？能不能举出一个团体，它由满足条件(2)、(3)、(4)、(5)的十个人组成，其中每个人认识且只认识五个人，而且有一个熟人认识他所不认识的人．能不能举出，满足除条件(1)外全部条件的十个人组成的团体？

83．智力冠军　萨拉杰克博士宣布说，如果允许他提出20个问题，那末他就能猜中词典①里的任何一个词.

这可能吗？

84．粗心的教师　有一个教师，他想了解学生不同爱好之间的关系，打算调查一下自己的学生的爱好．有一次，上课以后，教师请喜欢音乐和喜欢下象棋的学生举起手来．音乐爱好者举左手，象棋爱好者举右手．结果，有30%的人举起了两只手．在象棋爱好者和自行车运动爱好者进行了类似的试验，结果有35%的学生举两只手．在音乐爱好者和自行车运动爱好者进行的第三次试验中，举两只手的有40%的学生．离开教室以后，教师才想起来，他忘记问哪些人这三方面都爱好，而且，他甚至没有统计一下，有多少学生每次都举了手．虽然如此，萨拉杰克博士向他保证，他所问的学生里，显然有一些有多方面爱好的人.

萨拉杰克博士如此有把握地作出这个判断，有充分的根

---

① 萨拉杰克博士用的是C．朗杰的《波兰语词典》，我们用《辞海》(1979年版)．——译者

据吗？

85. 三位棋手 在象棋俱乐部里，萨拉杰克博士经常遇到三位常客：吉米扬(D)，埃梅尔扬(E)和菲利克斯(F)。除了星期六和星期日，他们每天晚上都来，并且彼此各赛五盘。按照萨拉杰克博士的评定，这三个棋手的比赛等级分配如下：

从星期一到星期三，由于某种原因，吉米扬的竞技状态多少有点儿不佳，他的比赛萨拉杰克评定为 12 分。而在星期四和星期五，他已经发挥全部力量，以 17 分的等级比赛。埃梅尔扬不管哪一天都一样，按五盘计算，头三盘被评定为 16 分，但在后两盘，由于紧张和时间迟，比赛水平降低到 11 分。菲利克斯的竞技状态不易受任何波动，他的比赛萨拉杰克博士一直评定为 14 分。

上面所打的分数应当理解为：如果以 a 分比赛的棋手与以 b 分比赛的相遇，并且 $a>b$，那末前者总是胜的。

求 D 赢 E，E 赢 F，F 赢 D 的平均数。其次估计象棋俱乐部的常客 D、E、F 各人的“平均实力”。

86. 萨拉杰克博士的尺 在出售手工制品(亚麻布，包装纸，绳子)的商店里，要用有厘米刻度的木尺。从《一百个数学问题》第 94 题中已经知道，萨拉杰克的尺与商店营业员用的尺有些不同。

上面所列举的(以及没有说名字的)货物中，哪些用萨拉杰克博士的尺要比营业员通常用的更方便？

87. 萨拉杰克博士的温度计 萨拉杰克博士有一只有两种刻度的温度计：列氏[①]和摄氏。某个人评论说，只是没有华氏刻度。

---

① 列氏温度计是法国物理学家 Reaumur 在 1730 年首先使用的，它把水的冰点到沸点分为 80 度。——译者

——不然，——萨拉杰克回答说——看一看我的温度计，只要知道普通的加法，您就能知道华氏温度！

怎么做到这一点呢？

88．萨拉杰克和一个大政治问题 不久以前，萨拉杰克向联合国发出了一封冗长的抗议信，反对他们在秘书处文件里透露的一个计划．

计划规定，把全世界分成5个区域（欧洲，亚洲，美洲，非洲，大洋洲），在每个区域建立一个国际监督站，它的任务包括监督该区域内各国严格遵守国际法．按照计划起草者的打算，各站之间的距离应不小于一万公里．

是什么激起了我们这位出色的外交家的愤怒？

89．碗和首都 萨拉杰克博士没有求助于地图册和地球仪，就解决了下述问题：

有没有一种球形的碗，它遮盖了地球的1/5表面，并且恰好罩住了20个国家——联合国成员（当时共有101个）——的首都？

90．帕多麻脱① 众所周知，萨拉杰克博士是出色的棋手．在决定世界象棋冠军的决赛中（在决赛中，这位当之无愧的象棋名手执白），他的对手——匈牙利著名棋手凯达拉什——走了马 $g5\sim f7$ 将军，并且得到了胜利．但，…萨拉杰克博士证明了，白棋所处的局势既不能算作将死，也不能算作无子可动．因为它兼有两者的特点．这种从未见过的棋局，按照萨拉杰克的正确意见，被叫做“帕多麻脱”．根据评判委员会的裁定，世界象棋冠军的称号分授给决赛的这两位参加者．

① “帕多麻脱”是 патомат 的音译，它由 пат（无子可动）和 мат（将死）复合而成，表示国际象棋中如本题所说的一种局势．——译者

黑棋走了马 $g5\sim f7$ 后，棋盘上出现什么局势？

91．萨拉杰克博士——弹子手 萨拉杰克博士有一张圆形的弹子台，在台子的栏板上剜一个洞．游戏者把弹子摆在通过洞的圆台的直径上，并且瞄准着打弹子，使它从栏板弹回来落进洞里．球可以按三种轨迹运动：直线(当球沿通过洞的直径运动时，它从这条直径的另一端弹回来)和两条折线，这两条折线关于通过洞的直径对称．

萨拉杰克博士顺便对我说，他总是适当地选择(弹子的)出发点，使它的三种轨迹的长度相等．一般来说，直线轨迹的长度比折线轨迹的长度略小些．例如，如果把弹子台的半径取作单位长，那末对于开始时离洞 1.5 的球来说，直线轨迹的长度是 2.5，而折线轨迹的长度大约是 2.6．

能不能把弹子的初始位置，选得使直线轨迹与折线轨迹的长度精确地相等？

92．化圆为方 这个名称，萨拉杰克博士自己是给制图学里的下述问题的．

设想有一个海岛，它的海岸线是个理想的圆．如何画出这样的岛的正方形地图？

这位大师殷勤地说明，为了把岛变换为地图，应该使海岸线转换为正方形的边界，而且严格地保持比例，即岛的面积相等的部分应该转换为地图上面积相等的区域．

六、运动问题

93．三个赛跑运动员 三个选手 A、B、C 经常比赛 200 米，每次比赛后都记录了谁先越过终线，谁第二，谁第三．运动

季节结束时的统计表明，A 在大多数友谊比赛中超过 B，B 在大多数场合比 C 快，而 C 也在大多数场合得到比 A 好的成绩。

这是如何得到的？

94．体育比赛 所谓确定冠军的淘汰制(例如网球比赛里通行的制度)如下：

所有选手抽签分成两个一组(为简单起见，我们设有八个选手)，各组的获胜者参加第二轮比赛(他们只有 4 个)．第二轮比赛的两个得胜者进入第三轮决赛．获胜者就是冠军．

假设每个选手的实力都是完全确定不变的，而且实力较强的运动员总战胜较弱的．在这个条件下，淘汰制对于确定冠军来说是公平的，因为得到第一名的总是最强的选手．但对于得到第二名的运动员来说，淘汰制就不能算是公平的了．第二名总是参加决赛而被冠军打败的选手，按实力来说，他不一定是第二位的．

实力是第二位的选手取得第二名的概率有多大？

95．再谈体育比赛 在实行淘汰制的比赛里，如果除了五个选手以外，其它选手都退出了比赛，那末，我们可以加进三个空额，使得总数仍然是八个．设抽签以后三个空额都在秩序表末尾(即抽了 6，7，8 号)．

在选手中，能力是第二位的运动员，取得第二名的概率有多大？

96．摩托车竞赛 煤渣跑道摩托车比赛迷中的一个不得不错过一次最有趣的比赛，他从朋友那里打听到：选手与比赛场次一样多，任两选手仅在一次比赛中相遇，在每次比赛里，与通常一样，四个选手出发．

摩托车竞赛爱好者得到的消息完全吗？

97．埋有地雷的棋盘 在棋盘的某些格子里埋着地雷，

使得开始时，不管把王往那儿放，总不能从盘的左边走到右边．证明：在这种情况下，车能只沿一些埋有地雷的格子从棋盘的上边走到下边．

也证明逆命题．

98．棋盘上的车 取一个纵横相等(8×8)的棋盘，它与普通的棋盘略有不同：棋盘上黑白格分布不一定相间，可以是任意的，只是在每条直行上至少有一个白格，而且至少有一条直行都是白的．如果下面的条件成立，我们能把车成功地放置在棋盘上(我们有足够的车，因此不会发生不够放的情况)．

(1) 车只放在白格上；

(2) 在棋盘上至少放一个车；

(3) 车不能相互攻击(即每条直行或横排上至多放一个)；

(4) 每个没有放车的、但沿横排被车攻击的白格，也处于某个车沿直行的威胁之下．

证明：车总能同时按条件1～4分布．

99．三维棋盘 在十六格的棋盘上可以这样地放棋子，使得所有横排、直行以及对角线上恰好有一个棋子．

取一个由64个小立方体组成的立方体．这样的立方体可以分成12层(16格棋盘12个)．

证明：可以把16个棋子这样地放在大立方体的方块里，使每一层上各条横排和直行上恰好有一个棋子．

100．再谈三维棋盘 分成小方块的立方体，可以看作一个三维棋盘．普通棋盘有$8^2=64$个方格，三维棋盘由$8^3=512$个小方块组成．可以这样制作：取一些8单位长的铅丝，使其中一些平行于z轴，且通过xy平面上坐标为$x=p$、$y=q$的点；另一些平行于y轴，通过xz平面上坐标为$x=p$、$z=q$的

点；还有一些平行于 x 轴，通过 yz 平面上坐标为 $y=p$、$z=q$ 的点．在三种情形里，整数 p、q 都取值 0, 1, 2, …, 8.

需要把 64 个车，放在三维棋盘的 512 个小方块中的 64 块上，使任何一个车都不攻击别的车．在三维棋盘上，除了普通的——水平盘上的——着法外，车还能沿纵列上下移动任意距离．上面所说的车应该这样放：无论哪儿放上第 65 个车的话，一定处在这 64 个车之一的攻击之下．

七、低年级学生的问题

两个三角形　有两个三角形．第一个三角形的各边大于第二个三角形的任何一边．能不能说前者的面积大于后者的面积？

数数　我们大声地念：1, 2, 3, …, 10, 11, 12, …, 20, 30, …, 90, 100, 200, …, 900, 1000, 2000, …, 10000, 20000 等等．

这样念到一百万时，我们要数多少个数？念到十亿呢？

经济的桶　用微分学方法或更初等的方法可以说明，制造圆柱形罐头时，如果高和宽（底面直径）相等，所费的白铁最少．据此，不使用更多的微分学知识（甚至无需任何计算）证明：制造圆柱形桶（无盖）时，如果桶高等于宽度的一半（即桶底半径），那末费用最小．

四边形　A、B、C、D 是平行四边形的顶点．点 P 不在平行四边形的边所确定的任何一条直线上．

证明：存在以点 P、Q、R、S 为顶点的四边形，使 A、B、C、D 分别是它的边 PQ、QR、RS、SQ 的中点．

解　答

1. 设以点$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$为圆心、r为半径的圆，至少通过两个整点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，其中x_1, x_2, y_1, y_2是自然数或者0，并且$x_1 \neq x_2$，或$y_1 \neq y_2$. 那末这两个点到圆心的距离等于它的半径r:

$$r=\sqrt{(x_1-\sqrt{2})^2+(y_1-\sqrt{3})^2},$$
$$r=\sqrt{(x_2-\sqrt{2})^2+(y_2-\sqrt{3})^2}.$$

把这两个等式的右边平方，并使它们相等，得

$$(x_1-\sqrt{2})^2+(y_1-\sqrt{3})^2=(x_2-\sqrt{2})^2+(y_2-\sqrt{3})^2.$$

经过简单的变形，得

$$2(x_2-x_1)\sqrt{2}+2(y_2-y_1)\sqrt{3}=x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2.$$

这样，根据所作的假设，等式

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=c$$

应该成立，其中a, b, c是整数(包括0). 但是对非0的所有整数a, b, $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$是无理数，而等式右边的数c，或者等于0，或者是非零的整数. 因此，这个等式只能在$a=b=c=0$，即$x_1=x_2$, $y_1=y_2$时成立，与假设矛盾. 这样一来，与假设的以点$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$为圆心、r为半径的圆，至少通过两个整点相矛盾. 由此我们断言，随着所取半径的不同，这样的圆或者只通过一个整点，或者不通过任何整点.

2. 利用上题的解答，解这个问题特别容易. 事实上，考虑以点$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$为圆心和变动的r为半径的圆. 如果r

取得充分小，显然随便哪个整点都不会落在这个圆内．现在，我们按下述方式把所有整点编号．设 P_1 表示最靠近点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的整点；P_2 是除 P_1 外最靠近点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的整点；一般地，P_n 是除 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 外所有整点中最靠近点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的整点．设 r_k 是 P_k 到点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的距离．去掉了前面的整点后，在余下的整点中挑选最靠近点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的整点，我们一个个地把平面上所有的整点都编上号，并且它们离圆心 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的距离 $r_1, r_2, \cdots$ 形成单调增加数列：

$$r_1<r_2<r_3<\cdots<r_n<r_{n+1}<\cdots$$

事实上，如果对某个 n 有 $r_n=r_{n+1}$，这就是说，有两个不同的整点到点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的距离相等．根据上题，这是不可能的．

现在我们取一个数列 $R_0, R_1, R_2, \cdots$，满足不等式

$$R_0<r_1<R_1<r_2<R_2<r_3<\cdots,$$

那末以点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 为圆心，R_i 为半径的圆，恰好包含 i 个整点 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_i$．半径为 R_0 的圆内不包含任何整点．

类似地可以证明，在以点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ 为球心的球面上，至多只有一个（空间的）整点．因而在三维空间里，存在内部恰好有 n 个整点的球．

3．对于某些情形，我们只用足够详细的图来说明．在必要时，这些情形的证明可以毫无困难地写出来．

(1) 图 2 表明内部没有整点的最大的圆，它的直径等于 $\sqrt{2}$．

(2) 图 3 表明内部恰好有一个整点的最大的圆，它的直径等于 2．

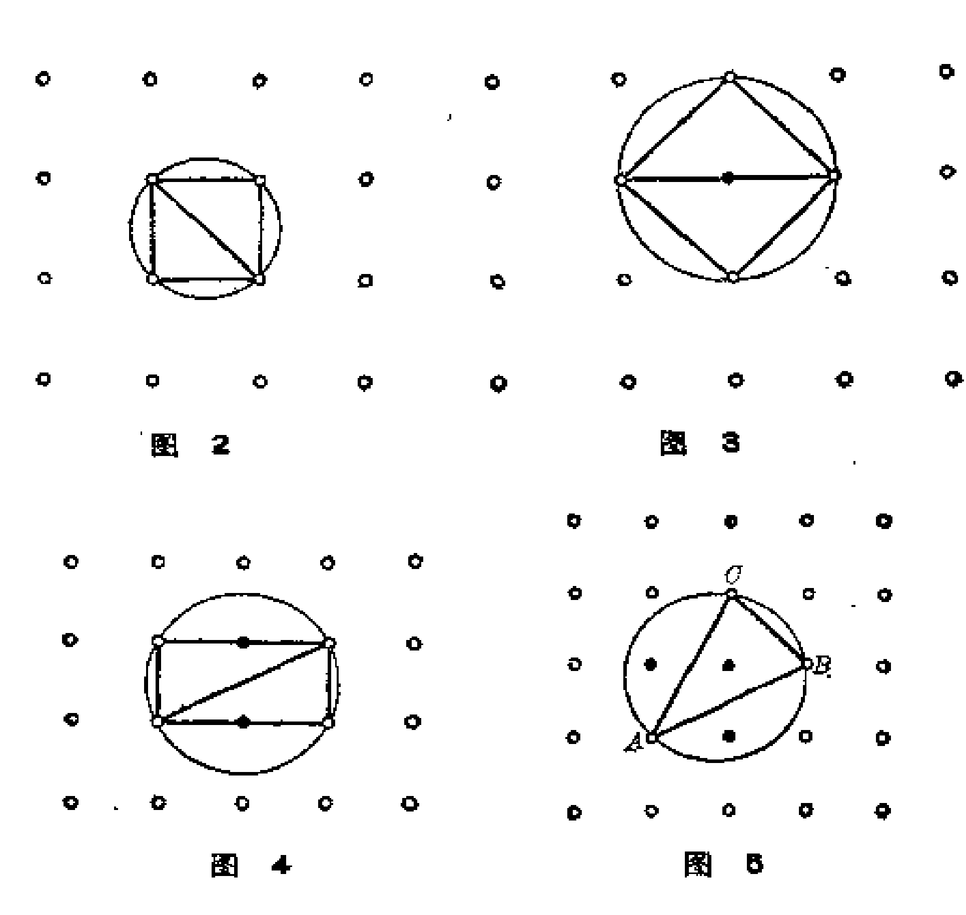


图 2　　图 3

图 4　　图 5

(3) 图 4 画出了内部含两个整点的最大的圆，它的直径等于$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

(4) 图 5 上表明内部有 3 个整点的最大的圆，我们来计算它的直径. 这个圆是三角形 ABC 的外接圆，它的边为 $AB=AC=\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{2}$. $\triangle ABC$ 的高 h 和面积 S 分别是

$$h=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$S=\frac{1}{2}h\cdot BC=\frac{3}{2}.$$

由三角形外接圆半径 R 的关系式①有

$$2R=\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{2S}=\frac{5\sqrt{2}}{3},$$

因而所求的直径等于 $5\sqrt{2}/3$.

(5) 直径为 $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 的圆(见图 6), 是内部包含 4 个整点的最大的圆.

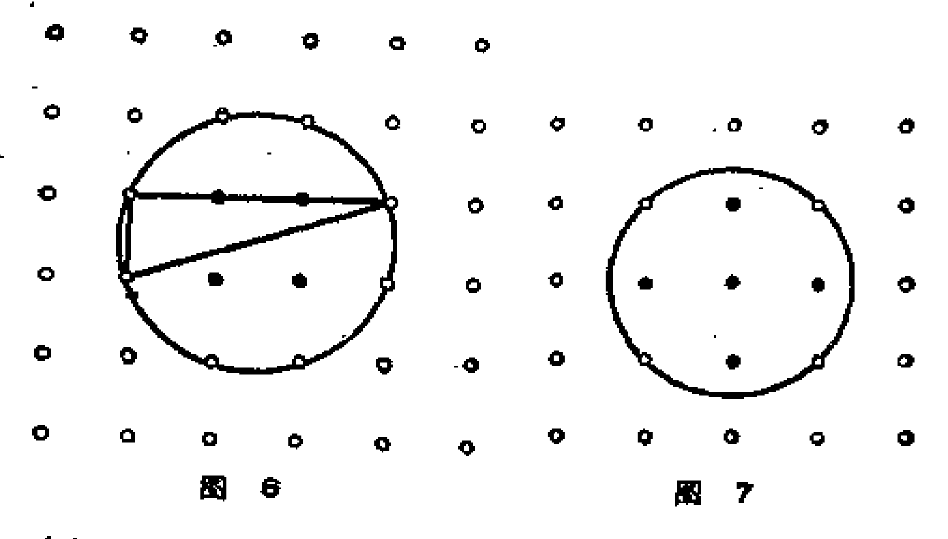


图 6　　　　图 7

(6) 这种情形不但是最有趣的, 也是最困难的. 图 7 里画了直径为 $2\sqrt{2}$ 的圆, 内部有 5 个整点, 但是它并非这样的圆里最大的一个(看起来似乎很象). 我们回到图 6. 这个图上的圆只包围了四个整点, 把它稍微移动一下, 立刻就至少使三个新的整点落到圆内. 所以, 内部含有 5 个整点的圆的直径要小于 $\sqrt{10}$, 从而小于内部含有四个整点的最大圆的直径. 我们要说明(这正是最有趣的地方), 内部恰好含有五个整点的最大的圆根本不存在.

考察图 8 里的整点, 我们要找一个圆, 在它内部含有点

---

① 设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边, R 是外接圆半径, C 是它的内角之一, 则 $\frac{c}{\sin C}=2R$, $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}$. ——译者

P_1、P_2、P_3、P_4 以及第五个点 P_5. 包含点 P_1、P_2、P_3、P_4 的最大圆的圆心在点 O，它的半径等于 OP_6. 作 $\angle P_6OP_7$ 的平分线，在此线上任取一点 Q，使它充分靠近 O 点. 以 Q 为圆心，QP_7 为半径作圆. 不难验证，点 P_5 落在这个圆内，因为 $QP_5<QP_7$. 同样容易知道，把半径为 OP_6 的圆的圆心，从点 O 移到点 Q 的时候（除 P_5 外），其它任何整点都不会落到这个圆内，而本来在这个圆内的整点也不会跑到圆外去. 这样，选取充分靠近点 O 的点 Q 时，可以得到半径与

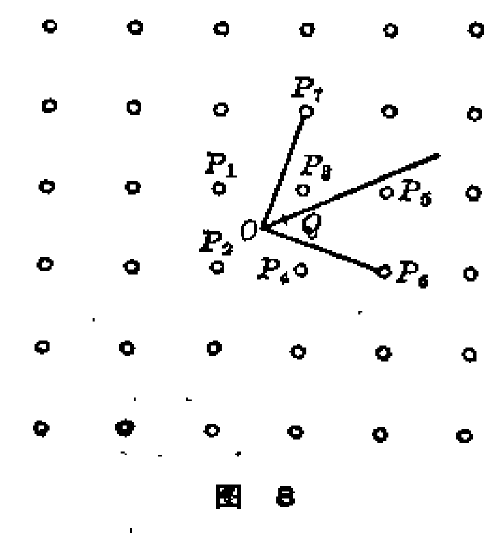


图 8

$$OP_5=\sqrt{10}/2$$

相差任意小的、内部有五个整点的圆. 但直径为 $\sqrt{10}$ 的圆内，或者有四个整点，或者马上就包含 7 个整点. 在这样的圆里，既不可能有 5 个整点，也不可能有 6 个整点.

内部含有 6 个整点的最大的圆，它的直径是 3（小于 $\sqrt{10}$）. 内部含有 7 个整点的最大的圆，它的直径必大于 $\sqrt{10}$.

4. 内部可仅含有 1、2、3、4 个整点的圆，它的直径 d_1、d_2、d_3、d_4 分别满足不等式

$$0<d_1\leqslant 2,\quad 1<d_2\leqslant\sqrt{5},$$

$$\sqrt{2}<d_3\leqslant\frac{5\sqrt{2}}{3},\quad \sqrt{2}<d_4\leqslant\sqrt{10}.$$

因此，随着位置的不同，而在内部可以含有 1、2、3、4 个整点的圆，它的直径 d 应该同时满足这四个不等式：

$$\sqrt{2}<d\leqslant 2.$$

直径满足这个不等式的圆，把它移动后，不可能使它里面有5个整点．因为从图9可见，这样的圆的直径应该大于2．把直径 $d\leqslant 2$ 的圆移动，更不可能使它内部至少有5个整点．因而，在直径 d 满足不等式 $\sqrt{2}<d\leqslant 2$ 的圆内，只能有1、2、3或4个整点．这样，就得到了本题第一部分的回答．

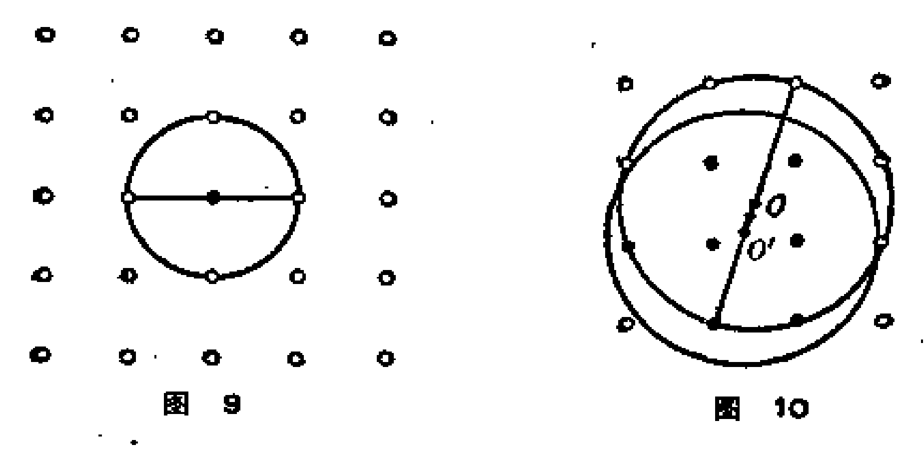


图 9　　　　图 10

为了解答第二部分，要利用问题3．我们已经知道，内部有4个整点的最大的圆，它的直径是 $\sqrt{10}$，而内部有5个整点的圆的直径应该小于 $\sqrt{10}$．因而，移动直径是 $\sqrt{10}$ 的圆，不可能使它内部含有5个整点．

类似地可以证明，直径为 $\sqrt{10}$ 的圆内不可能出现6个整点．但是，可以移动这样的圆，使它内部含有7(图10)，8(图11)或9(图12)个整点．

考察一组组不同的十个整点，可以确认，包围10个整点的圆的直径应该大于 $\sqrt{10}$．因而，直径为 $\sqrt{10}$ 的圆内不可能有10个整点．

5．条件 $a^2+d^2=b^2+c^2$ 说明，数 a、d 和 b、c 可以是有公共斜边的两个直角三角形的直角边长．

把等式 $a+d=b+c$ 两边平方，并利用上述条件，我们得

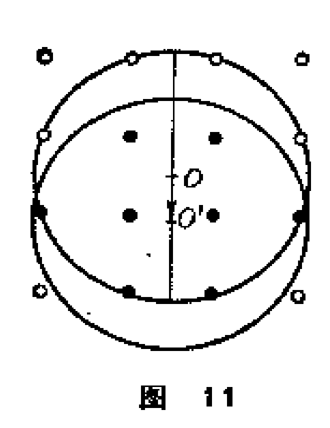


图 11

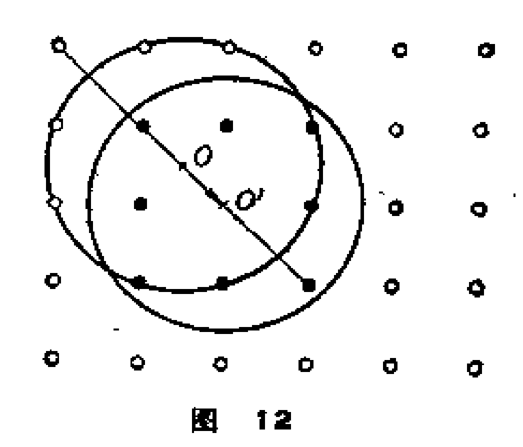


图 12

到 $ad=bc$，或者说，这两个直角三角形有相同的面积，因而斜边上的高相等(图 13)．此外，这两个三角形相似．因为

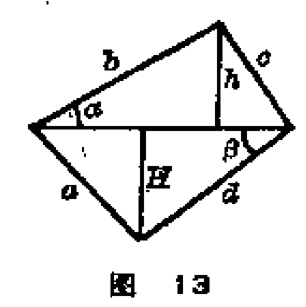


图 13

$$h\operatorname{ctg}\alpha+h\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)$$
$$=H\operatorname{ctg}\beta+H\operatorname{ctg}(90^\circ-\beta),$$

而 $h=H$，所以

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}\beta,$$

或 $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$．由于 $0<\alpha$、$\beta<90^\circ$，故 $\alpha=\beta$，从而直角边两两相等．这与条件 $0<a<b<c<d$ 矛盾．

6．首先证明，如果本题的回答是肯定的，也就是，如问题条件所要求的那样，能够把区间 $[0, 1]$ 划分成两个集，那末在区间 $[0, 1]$ 上的任一点 x，函数 $f(x)$ 应满足不等式 $f(x)\neq x$．

事实上，设对 $[0, 1]$ 中的某个 x_0，有 $f(x_0)=x_0$．按照问题的条件，如果 $x_0\in A$，那末 $f(x_0)\in B$．但这意味着 x_0 同时属于不相交的集 A 和 B．这个矛盾证明了对所有 $x\in[0, 1]$ 有 $f(x)\neq x$．

从问题的条件可知，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，特别地有 $0\leqslant f(0)\leqslant 1$，$0\leqslant f(1)\leqslant 1$．但 $f(0)\neq 0$，$f(1)\neq 1$，所以 $0<f(0)\leqslant 1$，$0\leqslant f(1)<1$．设

$$\varphi(x)=f(x)-x,$$

对引进的新函数 $\varphi(x)$，不难知道，

$$\varphi(0)=f(0)>0,$$

$$\varphi(1)=f(1)-1<0.$$

作为两个连续函数的和，函数 $\varphi(x)$ 也在区间 $[0, 1]$ 上连续. 由于它在区间端点有相反符号的值，所以（根据连续函数的中间值定理）在某个点 $\xi(0<\xi<1)$ 应有 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)-\xi=0$，$f(\xi)=\xi$. 但我们已经知道，这不可能.

7. 把数 $\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\cdots}}}}$ 记为 x，我们得到了方程 $x=\sqrt{5+\sqrt{3+x}}$. 用逐次逼近法，可以从这个方程求出 x 的值. 当 $x=2$ 时，方程右边等于 2.69，而 $x=3$ 时，等于 2.73. 因此 x 的真值在 2.69 和 2.73 之间. 接下去的一步（即令 $x=2.69$——译者），得到近似值 $x\approx2.718$. 这样，$x<3$.

也可以通过其它途径解这个问题. 经过初等变换，方程 $x=\sqrt{5+\sqrt{3+x}}$ 变形为 $x^4-10x^2-x+22=0$，所求的数是这个方程的一个根. 不难知道，$x=-2$ 满足这个方程. 左边除以 $x+2$，得三次方程 $x^3-2x^2-6x+11=0$. 它的根的近似值（精确到 10^{-6}）是 $x_1=2.718709$，$x_2=1.683969$，$x_3=2.402678$. 这三个根都小于 3. 本题所求的是第一个根 $x_1=2.718709$. 这样，$\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\cdots}}}}<3$.

有价值的是，我们考察的这个数 x 是数 e 的很好的近似值，因为精确到 10^{-6} 时，$e\approx2.718281$，此时 $x-e<0.0005$.

这样，使我们能从前面所作的论证里，得到一些几何的结论. 众所周知，数 e 是超越数（它不是任何有理系数的代数方程的根），如果给定单位长线段，它不可能用圆规和直尺作出.

正是近似式

$$e\approx\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\cdots}}}}$$

使我们能近似地作出 e. 事实上，不难验证

$$\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}}}}}\approx 2.718.$$

左边的数可以从1通过有限次加法和开平方得到，因此这个数能够用圆规和直尺作出. 下面是作法.

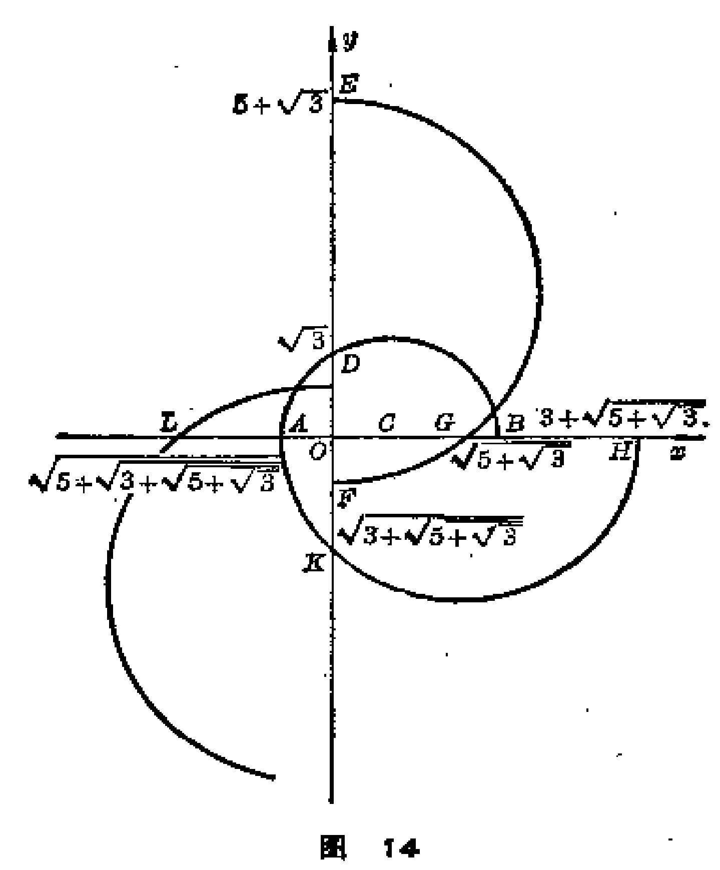


图 14

作两条直线垂直相交于 O 点(图 14). 在直线 Ox 上截取线段 $OA=1$, $OB=3$. 以 AB 为直径作半圆，在直线 Oy 上得到线段 $OD=\sqrt{3}$. 其次，在直线 Oy 上截取线段 $DE=5$, $OF=1$, 以 EF 为直径作半圆. 由于 $EO=5+\sqrt{3}$, $OF=1$,

所以 $OG=\sqrt{5+\sqrt{3}}$，这里 G 是第二个半圆与直线 Ox 的交点．在直线 Ox 上截取线段 $BH=3$, $OA=1$，利用以 AH 为直径的半圆，我们可以作出线段 $OK=\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3}}}$，然后用类似的方法作出线段 $OL=\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}$ 等等．在反复进行八次这样的作图后，得到了线段 $x\approx2.718$.

8．这个有价值的、虽然是不复杂的问题，是在用有理数逼近无理数的理论中产生的．

不失一般性，可以认为 p、q 是自然数．事实上，如果 p、q 取不同符号，那末有

$$\sqrt{2}-\frac{p}{q}>\sqrt{2},$$

当然更有

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{3q^2}.$$

如果这两个数都是负数，那末令 $p_1=-p$, $q_1=-q$，我们就把问题化成证明不等式

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p_1}{q_1}\right|>\frac{1}{3q_1^2},$$

其中 p_1 和 q_1 是自然数．

首先考虑 $p/q>\sqrt{2}$ 的情形．设 $p/q<1.55$.（由于 $\sqrt{2}<1.45$，分数 $p/q>1.55$ 与 $\sqrt{2}$ 之差大于 $1/10$，而分数 $1/3q^2$ 从 $q=2$ 开始小于 $1/10$．因此，对 $p/q>1.55$，要证的不等式显然是成立的．）

这样，设 $p/q<1.55$．我们有

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2-2=\frac{p^2-2q^2}{q^2}.$$

因为数 p^2-2q^2 是自然数，所以

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2-2\geqslant\frac{1}{q^2},$$

即
$$\left(\frac{p}{q}+\sqrt{2}\right)\left(\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right)\geqslant\frac{1}{q^2}.$$

因而
$$\frac{p}{q}-\sqrt{2}\geqslant\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{p/q+\sqrt{2}}.$$

由于 $p/q<1.55$，所以

$$p/q+\sqrt{2}<1.55+1.45=3,\quad \frac{1}{p/q+\sqrt{2}}>\frac{1}{3}.$$

这样一来，如果 $p/q>\sqrt{2}$，那末

$$\frac{p}{q}-\sqrt{2}>\frac{1}{3q^2},$$

这就是需要证明的.

如果 $0<p/q<\sqrt{2}$，那末

$$2-\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{2q^2-p^2}{q^2}\geqslant\frac{1}{q^2},$$

由此，
$$\sqrt{2}-\frac{p}{q}\geqslant\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\frac{p}{q}}>\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}>\frac{1}{3q^2}.$$

这样，当 $0<p/q<\sqrt{2}$ 时，下面的不等式成立

$$\sqrt{2}-\frac{p}{q}>\frac{1}{3q^2}.$$

由于对整数 p、q 来说，不可能有等式 $p/q=\sqrt{2}$，我们已经对所有的整数偶 p 和 $q(q\neq0)$ 证明了所要证的不等式.

9. 我们用反证法证明，ξ 不可能取区间 $[1/2,\ 2/3]$ 中的值. 设 ξ 满足不等式 $1/2\leqslant\xi\leqslant2/3$，用 ξ_1 表示连分数

$$\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}},$$

那末 $\xi=\dfrac{1}{a+\xi_1}$，由此

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{a_1+\xi_1}\leqslant\frac{2}{3},$$

$$\frac{3}{2}\leqslant a_1+\xi_1\leqslant 2. \tag{*}$$

不难证明 $0<\xi_1<1$，故 $a_1=1$. 在序列 $\{a_n\}$ 中，每个自然数出现且仅出现一次，因而 $a_2\geqslant 2$. 但这样一来，ξ_1 应满足不等式 $\xi_1<1/2$. 这与(*)式矛盾，因为由(*)式 ξ_1 应满足不等式 $1/2\leqslant\xi_1\leqslant 1$.

得到的这个矛盾说明，原来所作的假设 $\xi\in[1/2, 2/3]$ 是不正确的. 因此 $\xi\in[1/2, 2/3]$，这正是需要证明的.

在开区间 $(0, 1)$ 里，实际上存在着无穷多个区间（与 $[1/2, 2/3]$ 不同且彼此不同），它们由 ξ 的“不可达到的”值填满. 我们只写出几个例子：$[7/10, 3/4]$，$[5/7, 8/11]$，$[9/11, 5/6]$ 等等. 证明这些区间的“不可达到性”不会有什么困难. 每个形如 $\left[\dfrac{2k+1}{2k+3}, \dfrac{k+1}{k+2}\right]$ 的区间，对 ξ 来说也是不可达到的，这里 $k=1, 2, 3, 4, \cdots$（$k=1$ 时，就是上面考察过的区间 $[1/2, 2/3]$）. 对这种场合证明“不可达性”也不复杂，可以如本题解答的第一段那样进行.

10. 设 $\{a_n\}$ 是满足题设条件的正数列. 因为 $a_n-a_{n+1}=a_{n+2}>0$，所以序列 $\{a_n\}$ 是递减的. 又由于它是正项，所以有界.

考虑序列

$$\{b_n\}=\left\{a_{n+1}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right\}.$$

我们要证明，它的项之间存在下面的关系：

$$b_{n+1}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}b_n.$$

事实上,

$$b_{n+1}+b_n\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=a_{n+2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}+\left(a_{n+1}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right)\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=a_{n+2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}-a_n$$

$$=a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$$

$$=0.$$

特别地,由此可得

$$b_n=\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n b_0.$$

但
$$\left|-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|>1,$$

而序列 $\{b_n\}$ 有界，所以 $b_0=0$. 从而，不仅当 $n=0$ 时 $b_n=0$, 而且对所有自然数 n 有 $b_n=0$, 因此

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a_n.$$

因为 $a_0=1$, 所以

$$a_n=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n.$$

这样,本题中所说的性质唯一地确定了一个序列.

12. 考虑由关系式

$$a_0=2,\ a_n=a_{n-1}^2-n \quad (n\geqslant 1) \tag{1}$$

定义的数列. 我们要证明,所有的 a_n 满足不等式

$$a_n>n. \tag{2}$$

直接检验可知，不等式(2)对 a_0, a_1, a_2, a_3 成立．设对某个 $k\geqslant 3$，有 $a_k>k$，根据(1)式有

$$a_{k+1}=a_k^2-(k+1)>k^2-(k+1)=k^2-k-1.$$

容易证明，$k\geqslant 3$ 时，不等式

$$k^2-k-1>k+1$$

成立，所以

$$a_{k+1}>k+1,$$

证明完成．

从不等式(2)得知，对任意 $n\geqslant 0$，有

$$a_n>0. \qquad (3)$$

由(1)及(3)式，直接得到一连串的不等式

$$a_0>0, \qquad a_3=[(a_0^2-1)-2]^2-3>0,$$

$$a_1=a_0^2-1>0, \qquad a_4=\{[(a_0^2-1)^2-2]^2-3\}^2-4>0,$$

$$a_2=(a_0^2-1)^2-2>0, \qquad \cdots\cdots.$$

解出 a_0，得

$$a_0>0, \qquad a_0>\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

$$a_0>1, \qquad a_0>\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4}}}},$$

$$a_0>\sqrt{1+\sqrt{2}}, \qquad \cdots\cdots.$$

总之，对任何自然数 n，

$$a_0=2>\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}.$$

13．本题的回答是否定的，不存在满足本题条件的三角形．证明如下．

设 ABC 是边长为自然数 a、b、c 的三角形(图 15)，高 CD 等于底边 AB．

首先，我们发现 $a\neq b$(否则应有等式 $(2a)^2=5c^2$，这是不可能的)．不失一般性，设 $a>b$．(我们指出，不等式 $b\leqslant c$ 也不

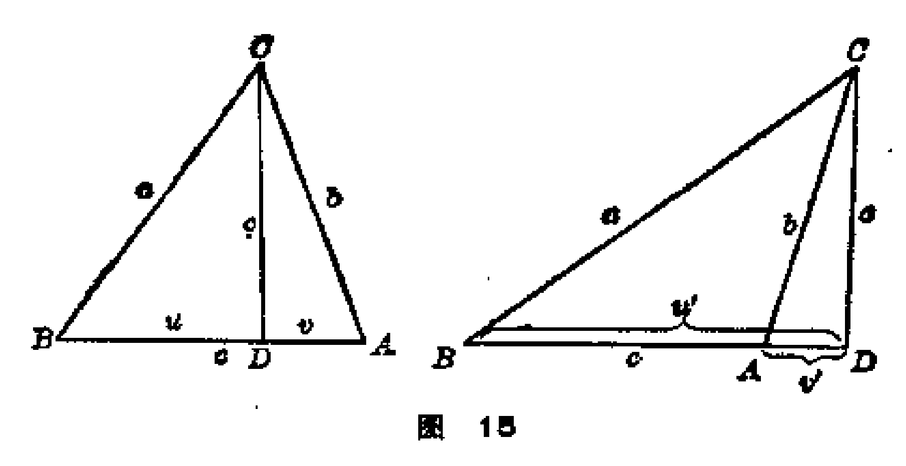


图 15

可能成立.)

注意到三角形元素之间的关系,我们得到下列方程组:

$$\begin{cases} a^2=c^2+u^2, & (1) \\ b^2=c^2+v^2, & (2) \\ c=u+v, & (3) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a^2=c^2+u'^2, & (1') \\ b^2=c^2+v'^2, & (2') \\ c=u'-v'. & (3') \end{cases}$$

其中 u、v、u'、v' 可以证明应是自然数.

例如,我们证明 u、v 是自然数. 因为 $a>c$, 所以 $k=u^2=a^2-c^2$ 是自然数,而 $u=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$, 一般说来是正有理数. 把它表示成 $u=p/q$ 的形式,这里 p、q 是满足 $(p, q)=1$ 的自然数[(p, q)表示 p, q 的最大公约数, $(p, q)=1$, 也就是说, p, q 是互素的——译者].

把式 $u=p/q$ 两边平方, 得 $p^2=kq^2$, 这里 $k=u^2$ 是自然数. 由此可得 $q=1$. 这说明, $u=p$ 和 $v=c-p$ 都是自然数. 类似地可以证明,数 u' 和 v' 也都是自然数.

这样,本题就归结为解自然数 a、b、c、u、v 的方程组

$$\begin{cases} a^2-b^2=u^2-v^2, \\ c=u+v, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a^2-b^2=u^2-v^2, \\ c=u-v, \end{cases}$$

其中 $a>b>c$。

我们要证明，自然数 a、b、u、v(其中 $a>b$)的方程

$$a^2-b^2=u^2-v^2$$

的全部解由下式确定：

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}(ms+nr), \quad b=\frac{1}{2}(ms-nr), \\ u=\frac{1}{2}(ns+mr), \quad v=\frac{1}{2}(ns-mr), \end{cases} \tag{4}$$

其中 m、n、r、s 是自然数，满足条件 $(m, n)=1$，$ms>nr$，$ns>mr$，并且，或者 r 和 s 是偶数，或者 m、n、r、s 都是奇数。方程 $a^2-b^2=u^2-v^2$ 的每一个自然数解，都在(4)式确定的数中出现且仅出现一次。

设 a、b、u、v 是满足方程 $a^2-b^2=u^2-v^2$ 的自然数，$s=(a+b, u+v)$。那末 $a+b=ms$，$u+v=ns$，这里 m、n 是互素的自然数。把它们代入方程

$$(a-b)(a+b)=(u+v)(u-v),$$

得

$$(a-b)m=(u-v)n.$$

由于 $(m, n)=1$，所以 $n|(a-b)$ [“|”是整除符号，$n|(a-b)$ 就是 n 整除 $a-b$——译者]，又因为 $a>b$，所以 $a-b=nr$，这里 r 是某个自然数。把它代入方程 $(a-b)m=(u-v)n$，得 $nrm=(u-v)n$，即 $u-v=mr$。解关于 a, b, u, v 的方程组

$$a+b=ms, \qquad u+v=ns,$$

$$a-b=nr, \qquad u-v=mr$$

便得到(4)式.

因为 u、v 是自然数，所以应有 $ns>mr$ 和 $ms>nr$. 其次，r 和 s 应该同是偶数或者同是奇数. 事实上，如果 r 是奇数，而 s 是偶数，那末由等式 $ms+nr=2a$ 应该得到 n 是偶数，而从等式 $ns+mr=2u$ 应得 m 也是偶数. m 和 n 同是偶数与 $(m, n)=1$ 矛盾. 如果 r 和 s 都是奇数，那末从等式 $ms+nr=2a$，得 m 和 n 也都是奇数[由于 $(m, n)=1$，它们不可能同是偶数；由于 $ms+nr=2a$，它们不可能一个是奇数，一个是偶数]. 于是，或者 r 和 s 都是偶数，或者 m、n、r、s 都是奇数.

另一方面，如果自然数 m、n、r 和 s 具有这样的性质，并且 $(m, n)=1$, $ns>mr$, $ms>nr$. 容易知道，由(4)式定义的数 a、b、u、v，满足方程 $a^2-b^2=u^2-v^2$. 也不难验证，在由(4)式定义的数中间，这个方程的每一个解出现且仅出现一次. 事实上，从(4)式可知，$a+b=ms$, $u+v=ns$，这两个等式说明[由于 $(m, n)=1$]，$s=(a+b, u+v)$. 由此容易推知，数 s、m、n 和 r 完全由 a、b、u 和 v 确定. 这就证明了我们的结论.

结合(4)式和(1)、(3)式[或(2)、(3)式]，我们得到

$$m^2s^2+n^2r^2=4n^2s^2+n^2s^2+m^2r^2,$$

或

$$(m^2-n^2)(s^2-r^2)=(n^2-m^2)(r^2-s^2)=4n^2s^2, \qquad (5)$$

并且 $(m, n)=1$.

现在要证明，方程(5)没有自然数解，从而以(4)式代入(1′)和(3′)式，得到的方程

$$(m^2-n^2)(s^2-r^2)=4m^2r^2 \qquad (5')$$

也没有自然数解.

不失一般性，设 $(r, s)=1$. [若 $(r, s)=d>1$，则可设

$r=dr_1$, $s=ds_1$, 得 $(m^2-n^2)(s_1^2-r_1^2)=4n^2s_1^2$, 其中 $(r_1, s_1)=1$.]

设 $m>n$ 时, $(m^2-n^2,\ 4s^2)=\alpha$, 则 $m^2-n^2=\alpha\gamma$, $4s^2=\alpha\delta$, 其中 γ、δ 是自然数, 且 $(\gamma,\ \delta)=1$. 把这些式子代入(5)式, 得 $(s^2-r^2)\alpha\gamma=n^2\alpha\delta$, 或 $(s^2-r^2)\gamma=n^2\delta$. 因为 $(\gamma,\ \delta)=1$, 所以 $\delta|(s^2-r^2)$, $s^2-r^2=\beta\delta$, 这里的 β 是某个自然数. 这样, $\beta\gamma\delta=n^2\delta$, 或 $n^2=\beta\gamma$. 另一方面, 如果 α、β、γ、δ 是自然数, $m^2-n^2<\alpha\gamma$, $s^2-r^2=\beta\delta$, $n^2=\beta\gamma$, $4s^2=\alpha\delta$, 那末 $(m^2-n^2)\times(s^2-r^2)=4n^2s^2$.

由于 $(m^2-n^2,\ n^2)=1$ [这可从 $(m, n)=1$ 得到], 故 $\gamma=1$. 而从等式 $s^2-r^2=\beta\delta$, $4s^2=\alpha\delta$ 和 $4s^2-4(s^2-r^2)=4r^2$ 得知 $\delta|4r^2$, $\delta|4s^2$. 但 $(r,\ s)=1$, 故 $(r^2,\ s^2)=1$, 从而 $\delta|4$. 这样一来, $\delta=4$, 或 $\delta=2$, 或 $\delta=1$.

如果 $\delta=4$, 那末 $m^2-n^2=s^2$, $s^2-r^2=4n^2$, 因此 $s^2+n^2=m^2$, $r^2+(2n)^2=s^2$. 最后的式子说明(由于 $(r,\ s)=1$), 存在自然数 p、q, 使 $n=pq$, $s=p^2+q^2$, $(p,\ q)=1$. 因而 $s^2+n^2=p^4+3p^2q^2+q^4=m^2$.

正如 H. C. Pocklington 证明过的, 方程 $x^4+kx^2y^2+y^4=z^2$ 对 k 的某些值没有自然数解 x、y、z, 其中有 $k=3$.

若 $\delta=2$, 则 $m^2-n^2=2s^2$, $s^2-r^2=2n^2$ 或 $n^2+2s^2=m^2$, $r^2+2n^2=s^2$. 第一个等式的两边乘以 r^2, 第二个等式的两边乘以 m^2, 我们得到 $n^2r^2+2r^2s^2=m^2r^2$, $m^2r^2+2m^2n^2=m^2s^2$, 由此, $2m^2n^2+2r^2s^2=m^2s^2-n^2r^2$. 令

$$x=mn,\quad y=rs,$$

$$a_1=\frac{(ms+nr)}{2},\quad b_1=\frac{(ms-nr)}{2}.$$

因为数 $m^2s^2-n^2r^2$ 是偶数, 所以 ms 和 nr 或者都是偶数,

或者都是奇数. 由此可得, a_1 和 b_1 是自然数. 不难验证, $x^2+y^2=2a_1b_1$, $xy=a_1^2+b_1^2$. 因而 $x^4+3x^2+y^4=(a_1^2+b_1^2)^2$. 这样,我们又得到了 Pocklington 方程,它没有自然数解.

最后,若 $\delta=1$, 则 $m^2-n^2=4s^2$, $s^2-r^2=n^2$. 从毕达哥拉斯方程 $n^2+(2s)^2=m^2$[注意到$(m, n)=1$]推知, s 是偶数. 从另一个毕达哥拉斯方程 $n^2+r^2=s^2$——由于$(r, s)=1$——可知 s 是奇数. 这样,方程组

$$\begin{cases} n^2+(2s)^2=m^2, \\ n^2+r^2=s^2 \end{cases}$$

是矛盾的.

类似地可以证明, $m<n$ 时, 以及方程(5′)也导致矛盾.

这样,有整数边长的、底边上的高等于底边的三角形不存在.

14. 容易知道,恒等式

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n(2n+1)}$$

成立. 由此可知,方程

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \tag{1}$$

当 $a=2n$, $b=2n+1$, $c=n(2n+1)$, $d=2n(2n+1)$时,就有满足不等式

$$a<b<c<d \tag{2}$$

的无穷多个自然数解.

我们要证明, 满足方程(1)和不等式(2)的四个素数不存在. 用反证法, 设存在这样的四个素数. 把方程(1)变形, 容易得

$$cd(b-a)=ab(d-c).$$

由此可得 $b|cd(b-a)$. 由于 b 与 cd 互素,故 $b|(b-a)$, 但这

是不可能的.

15. 这个问题的回答是否定的. 对四面体在平面上的任意两个位置A和B, 可以指出一条从A滚到B的道路, 使得从B返回到A时, 必定与原来的道路有重合部分. 为此只要看一看图16就可明白. 如果离开A后, 绕着它沿螺旋线滚动至B, 就得到了否定的回答.

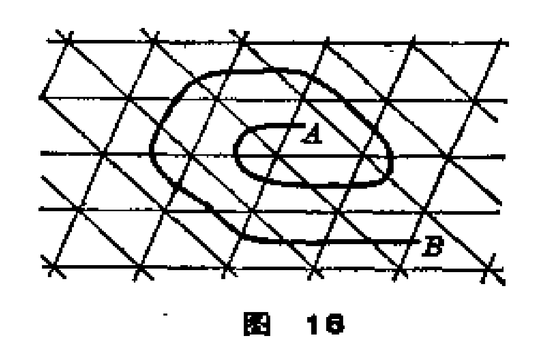


图 16

16. 不难猜到, 本题的思想是作者从菲利克斯·汪克尔的转子发动机——有旋转活塞的内燃机——结构得到启示的. 若干年前, 这种不同一般的发动机的方案, 就已广泛地讨论过. 在汪克尔发动机(我国通常叫"三角活塞旋转式发动机"——译者)里, 活塞(实际上是转子, 它是棱柱形的, 底面是等边三角形)在汽缸内旋转, 用侧棱沿着它的壁滑动. (不言而喻, 我们谈的是发动机的理想化的几何方案. 在实际结构中, 转子的侧棱和缸壁之间有隙缝.) 从几何观点来看, 转子的运动可以归结为处于某条闭曲线内的等边三角形的运动, 即这个三角形的顶点沿这条曲线滑动. 由于发动机应该作功, 并且转子的运动必须传递给机器, 三角形的中心应该描出一个圆. 应当注意, 这个圆不是三角形顶点沿着运动的那条曲线, 否则汽缸由转子截出的部分保持不变的体积, 当转子旋转时, 不可能产生周期地更替的压缩阶段(作功应有四冲程——译者).

在这个问题里, 只考虑汪克尔发动机理论里可能产生的一条曲线.

在闭曲线内, 等边三角形的运动允许推广到任意正多边

形的情形.

首先，我们推导"固定"于小圆内的那个点描出的曲线的方程. 大圆的圆心取作坐标原点(图 17). 设 P_0 是小圆圆心的初始位置(在 x 轴上)，P 是转动角 t 后所在的位置. 同时，原来的切点 A_0 转换为 A 点；而定点从位置 M_0 移动到位置 M.

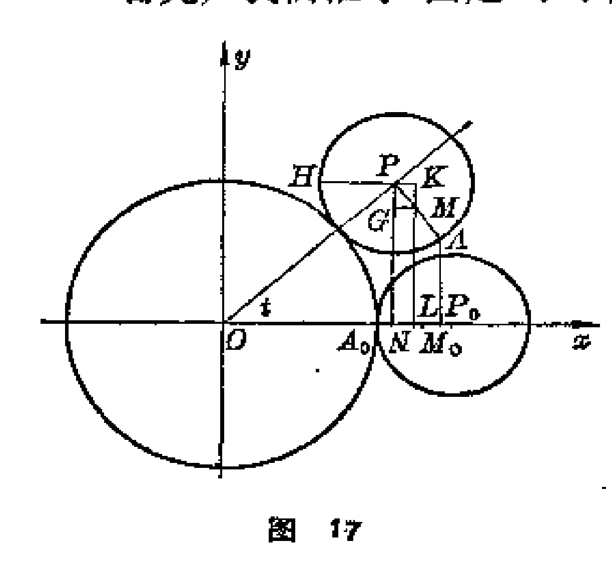


图 17

因为大圆半径是小圆半径的两倍，所以 $\angle OPA=2t$，而 $\angle HPA=3t$，这里 $HP \parallel OP_0$. 设 $x=OL$, $y=LM$, x、y 是 M 点的坐标，那末

$$x=ON+NL=ON+PK,$$

$$ON=9\cos t,$$

$$PK=PM\cos\angle MPK=-PM\cos\angle HPM=-\cos 3t,$$

$$y=PN-PG=9\sin t-\sin 3t.$$

这样，所求曲线的方程可以以参数形式表示为

$$\begin{aligned} x&=9\cos t-\cos 3t, \\ y&=9\sin t-\sin 3t. \end{aligned} \qquad (*)$$

我们要证明，内接于曲线 (*) 的等边三角形 T 可以这样运动：它的所有顶点将同时跑过整条曲线. 为此只要证明，若 $Q_1(x_1, y_1)$是曲线(*)对应于参数值 t_1 的某个点，$Q_2(x_2, y_2)$是这条曲线对应于参数值 $t_2=t_1+\frac{2\pi}{3}$ 的点，那末它们之间的距离

$$Q_1Q_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

与 Q_1 的位置无关，也就是说，与参数值 t_1 无关。

事实上，

$$\cos t_2=\cos\left(t_1+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}(\cos t_1+\sqrt{3}\sin t_1),$$

$$\sin t_2=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos t_1-\sin t_1),$$

由此，

$$\begin{aligned}x_2&=9\cos t_2-\cos 3t_2\\&=-\frac{9}{2}(\cos t_1+\sqrt{3}\sin t_1)-\cos 3t_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2-x_1&=\left[-\frac{9}{2}(\cos t_1+\sqrt{3}\sin t_1)-\cos 3t_1\right]\\&\quad-(9\cos t_1-\cos 3t_1)\\&=-\frac{27}{2}\cos t_1-\frac{9\sqrt{3}}{2}\sin t_1.\end{aligned}$$

类似地计算差 y_2-y_1:

$$y_2-y_1=\frac{9\sqrt{3}}{2}\cos t_1-\frac{27}{2}\sin t_1$$

这样，

$$\begin{aligned}Q_1Q_2&=\frac{9}{2}\sqrt{(3\cos t_1+\sqrt{3}\sin t_1)^2+(3\sin t_1-\sqrt{3}\cos t_1)^2}\\&=9\sqrt{3}.\end{aligned}$$

所以，以这条曲线上对应于参数值 t_1, $t_1+2\pi/3$, $t_1+4\pi/3$ 的点 $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$, $Q_3(x_3, y_3)$ 为顶点的三角形是等边三角形。如果它的顶点 Q_1(当参数 t_1 从 0 变到 2π 时)描出了整条曲线，那末它的另两个顶点也画出了整条曲线。

在回答本题第一个问题时，同时也回答了第二个问题：三

角形 T(即 $\triangle Q_1Q_2Q_3$) 的边长等于 $9\sqrt{3}$ cm.

现在证明,当三角形 T 沿曲线(*)运动时,它的中心的轨迹是以坐标原点为中心,以 1 cm 为半径的圆.(换句话说,轨迹的中心就是大圆的圆心.)

把 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的中心的坐标记为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$. 众所周知,

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

由于

$$x_3=9\left(\cos t_1\cos\frac{4\pi}{3}-\sin t_1\sin\frac{4\pi}{3}\right)-\cos 3\left(t_1+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{9}{2}(-\cos t_1+\sqrt{3}\sin t_1)-\cos 3t_1,$$

所以,

$$\bar{x}=\frac{1}{3}\left(9\cos t_1-\cos 3t_1-\frac{9}{2}\cos t_1-\frac{9}{2}\sqrt{3}\sin t_1-\cos 3t_1\right.$$

$$\left.-\frac{9}{2}\cos t_1+\frac{9}{2}\sqrt{3}\sin t_1-\cos 3t_1\right)$$

$$=-\cos 3t_1.$$

类似地,

$$\bar{y}=-\sin 3t_1.$$

从 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 消去参数 t_1, 得方程 $\bar{x}^2+\bar{y}^2=1$. 这样,三角形的中心绕着坐标原点描出了半径为 1 的圆,并且当每个顶点跑遍曲线(*)一次时,三角形的中心描出圆 $\bar{x}^2+\bar{y}^2=1$ 三次.

17. 设 r_1、r_2 分别是圆 K_1 和 K_2 的半径. 不失一般性,可以认为 $r_2\geqslant r_1$. 设 O_1、O_2 分别是 K_1、K_2 的圆心,d 是点 O_1、O_2 之间的距离,l 是直尺的长度. 又设 AB 是圆 K_1 的直径,CD 是 K_2 的直径,l_C 是 C 点到 K_1 上任意一点的距离,l_D 是 D 点到 K_2 上任意一点的距离.

1. 设 $r_2>r_1$, $d>r_1$.

(1) 考虑两圆外离的情形(图 18). 此时, 由于

$$l_C \leqslant CA = d + r_1 - r_2,$$
$$l_D \geqslant DB = d + r_2 - r_1,$$

所以

$$d + r_2 - r_1 \leqslant l \leqslant d + r_1 - r_2.$$

这是矛盾不等式, 因为

$$d + r_1 - r_2 < d + r_2 - r_1.$$

(2) 如果两圆外切, 那末仿照上面可导致同样的矛盾.

(3) 在两圆相交且 $CB \leqslant r_1$ 时, 也产生矛盾.

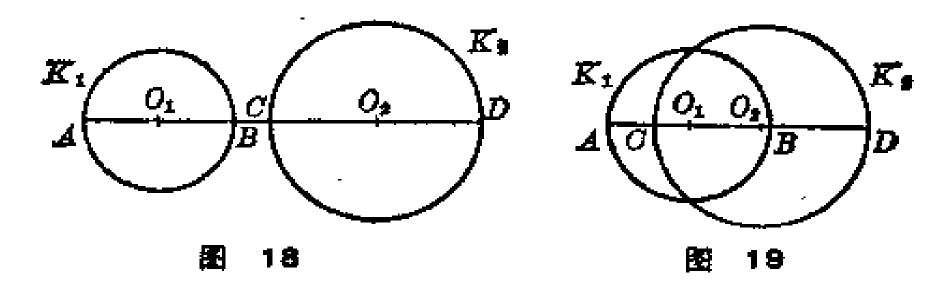


图 18　　　　图 19

(4) 现在考虑两圆相交且 $CB > r_1$ 的情形(图 19). 我们有

$$l_C \leqslant CB = r_2 - d + r_1,$$
$$l_D \geqslant DB = r_2 + d - r_1,$$

因而

$$r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1,$$

仍得到矛盾, 因为

$$r_2 - d + r_1 < r_2 + d - r_1.$$

(5) 当两圆内切时, 同样地产生矛盾.

(6) 一个圆在另一个圆内部时, 与情形(4)一样得到矛盾, 因为

$$l_C \leqslant CB = r_2 - d + r_1,$$

$$l_D \geqslant DB = r_2 + d - r_1,$$

从而

$$r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1.$$

总之，若 $r_2 > r_1$, $d > r_1$, 则圆 K_1 和 K_2 不可能同时用直尺的端点画出.

2．设 $r_2 > r_1$, $d = r_1$.

(1) 两圆相交时(图 20)，不难看出，不等式

$$l_C \leqslant CB = r_2 - d + r_1,$$

$$l_D \geqslant DB = r_2 + d - r_1$$

成立，由此

$$r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1.$$

由于 $d = r_1$, 所以 $r_2 \leqslant l \leqslant r_2$, 即 $l = r_2$. 但是，如果直尺的长度是 r_2, 那末当它的端点之一画出圆 K_2 一次时，另一端画出圆 K_1 两次(图 20)。 在这种情形，直尺的端点不可能同时画出两个圆.

(2) 在两圆内切以及内含时，情况也是类似的.

总之，若 $r_2 > r_1$, $d = r_1$, 则圆 K_1 和 K_2 不可能同时用直尺的端点画出.

3．类似于我们在 1、2 中进行的讨论可以推知，当 $r_1 = r_2$, 且 $d \geqslant r_1$ 时，如果直尺的长度等于圆心距($l = d$)，那末

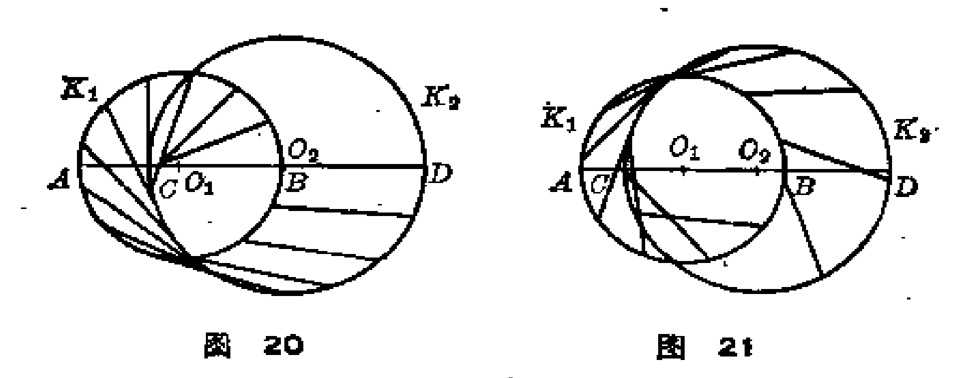


图 20　　图 21

可以用直尺的端点同时作出两个圆 K_1 和 K_2. 满足这些条件的两种明显的情形，已在本题的条件里说过.

4. 设 $r_2 \geqslant r_1$, $d < r_1$.

(1) 两圆相交时(图 21),

$$l_C \leqslant CB = r_2 - d + r_1, \quad l_D \geqslant DB = r_2 + d - r_1,$$

因此

$$r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1.$$

这些不等式不会导致矛盾. 如果象图 21 所画的那样移动的话，可以用长度 l 满足这些不等式的直尺，同时画出两个圆 K_1 和 K_2.

(2) 两圆内含或内切时是类似的.

总之，若 $r_2 \geqslant r_1$ 且 $d < r_1$, 则圆 K_1、K_2 可以用长度满足不等式

$$r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1$$

的直尺的端点同时画出.

由于 1～4 中得到的结论穷尽了所有情形，所以它们的逆命题真.

这样，直尺的端点能同时作出两个圆的充分必要条件是：

或者 $r_2 = r_1$, $d \geqslant r_1$, $l = d$,

或者 $r_2 \geqslant r_1$, $d < r_1$, $r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1$.

18. 设 G 是满足题设条件的凸区域，而 $PQRS$ 是 G 的外切四边形中面积最小的一个(图 22).

我们首先证明，点 A、B、C、D 等分四边形 $PQRS$ 的各边. 例如，考虑 QR 边，设 $BQ < BR$. 由于在域 G 的边界上没有尖点，而且边界上每个点处有且仅有一条切线，所以当 QR (作为动边)沿域 G 的边界转动时，QR 的长度将连续地改变. 这样，在弧 CB 上充分靠近点 B 的地方，应该存在着点 M,

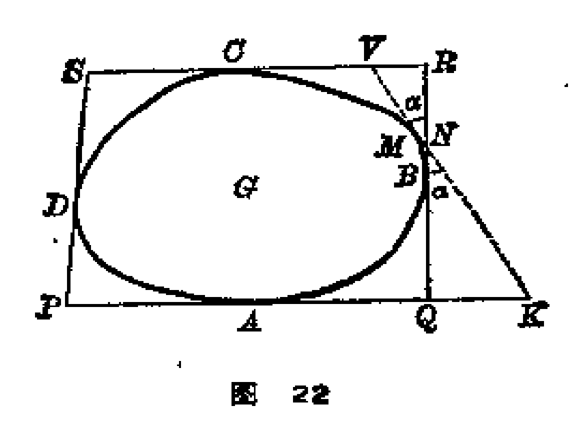


图 22

使 $MK>MV$，当然更有 $NK>NV$. 现在考虑线段 NQ. 如果有 $NQ\geqslant NR$, 那末可以让点 M 充分地靠近点 B, 而使 $NQ>NR$. 其次，考虑三角形 VNR 和 QNK. 由于 $\angle VNR=\angle QNK=\alpha$, 所以

$$S_{\triangle QNK}=\frac{1}{2}QN\cdot NK\sin\alpha>\frac{1}{2}NR\cdot NV\sin\alpha=S_{\triangle VNR},$$

其中 $S_{\triangle QNK}$ 和 $S_{\triangle VNR}$ 是 $\triangle QNK$ 和 $\triangle VNR$ 的面积. 然而这与四边形 $PQRS$ 是 G 的最小外切四边形矛盾，从而不等式 $BQ<BR$ 不可能成立. 类似地可以证明，$BQ>BR$ 也不可能成立，因此只有 $BQ=BR$.

大家都已知道，用直线段依次连接任意四边形各边中点，将得到一个平行四边形，它的面积是原四边形的一半. 现在，图形 G 的面积小于四边形 $PQRS$ 的面积，因此平行四边形 $ABCD$ 的面积大于 $G/2$.

19. 本题结论的证明依赖于下述引理.

引理 设 AMC 是凸域 G 的一段边界弧，AC 是连结该弧上两点 A、C 得到的弦. 在以 AC 为底边，弧 AMC 上另一个点为第三个顶点的所有三角形中，以切线平行于 AC 的点 B 为第三个顶点的三角形面积最大.

证明：过点 M 作 $MN\parallel AC$，与 BC 弧交于点 N（图

23). 以 AC 为底边，第三个顶点在弧 MBN 上(但除去 M、N)的三角形的面积，大于 $\triangle AMC$ 的面积，因为第三个顶点在弧 MBN 上的三角形的高大于 $\triangle AMC$ 的高. 因而，如果平行于 AC 的直线与边界弧交于两点，那末以 AC 为底边、以交点之一为第三个顶点的三角形，在以 AC 为底边、第三个顶点在弧 ABC 上的三角形中，它的面积不可能是最大的. 但是，由引理条件可知，有最大面积的三角形是存在的，所以通过这个三角形第三个顶点的、平行于 AC 的直线，应该与这条弧有且仅有一个公共点. 根据本题条件，这条直线应在 B 处与区域 G 的边界相切.

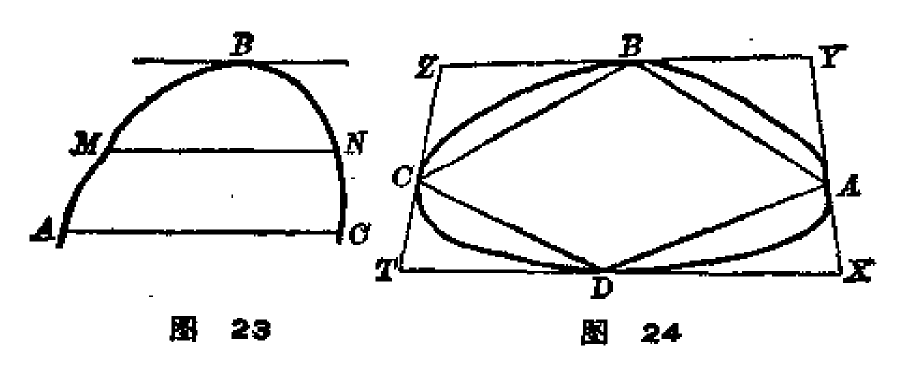


图 23　　图 24

现在我们来证明本题的结论. 设 $ABCD$ 是面积最大的内接四边形(图 24)，那末在以 AC 为底边，第三个顶点在 ABC 弧上的所有三角形中，$\triangle ABC$ 面积最大. 于是，这条弧在点 B 处的切线 ZY 平行于 AC. 由此立刻推知，$ZY \parallel TX$. 类似地可证 $ZT \parallel YX$. 这样一来，平行四边形 $XYZT$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 的面积的两倍，从而小于 $2G$，证毕.

20. 不失一般性，可以认为本题条件中所说的五边形边长是 1. 五边形的边可以当作向量研究. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$ 是五边形的一条边，而通过 $\boldsymbol{a}$ 及与它正交的向量 $\boldsymbol{b}$ 的平面与平面 $z=0$ 重合 (图 25). 那末所求的五边形的边形成的向量

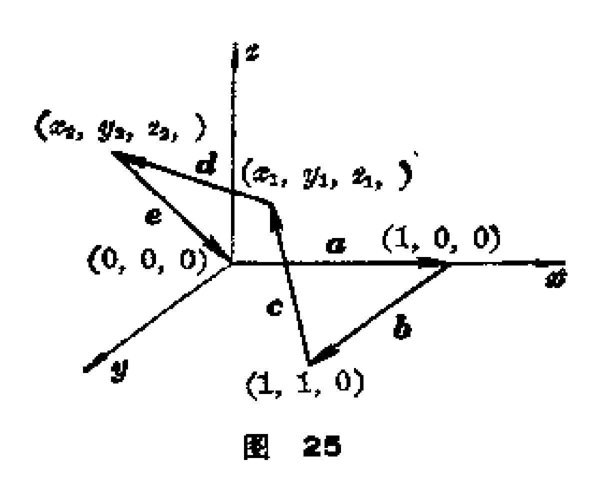


图 25

有下列坐标:

$$a=(1, 0, 0),$$
$$b=(0, 1, 0),$$
$$c=(x_1-1, y_1-1, z_1)$$
$$d=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$
$$e=(-x_2, -y_2, -z_2).$$

我们写出向量正交的条件:

(1) $(x_1-1, y_1-1, z_1)(0, 1, 0)=0$, 由此 $y_1=1$;

(2) $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)(x_1-1, y_1-1, z_1)=0$;

(3) $(-x_2, -y_2, -z_2)(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)=0$;

(4) $(-x_2, -y_2, -z_2)(1, 0, 0)=0$, 由此 $x_2=0$.

条件(2)和(3)可写成(利用(1)、(4)——译者)

$$-x_1^2+x_1+z_1z_2-z_1^2=0, \quad y_2^2-y_2+z_2^2-z_1z_2=0. \qquad (1)$$

由于所求的五边形的边长等于1, 所以

$$(x_1-1)^2+z_1^2=1, \quad y_2^2+z_2^2=1, \qquad (2)$$

$$x_1^2+(y_2-1)^2+(z_2-z_1)^2=1. \qquad (3)$$

解方程组(1)、(2)得

$$x_1=1, \quad y_2=0, \quad z_1=1, \quad z_2=1,$$

或 $$x_1=1, \quad y_2=0, \quad z_1=-1, \quad z_2=-1.$$

这两组解都不满足方程(3)，所以在三维空间里这样的五边形不存在.

21. 在上面的问题里，提出了能否在空间里作一个各边相等，各角是直角的五边形的问题. 已经知道，它的回答是否定的. 现在这个问题是第20题的推广，它需要说明：是否存在各角是直角的等边"奇数边形"，如果存在，是什么样的. 原来，当 $n=4, 5, 6, \cdots$ 时，在三维空间里存在着带直角的等边 $2n-1$ 边形，即等边直角七边形，九边形等等. 由于在三维空间里，当 $n=2, 3, 4, \cdots$ 时，等边直角的 $2n$ 边形明显是存在的①，所以可以说，从 $n=4$ 开始，除五边形外，在三维空间里存在着所有等边直角 n 边形.

如果我们能证明，在三维空间里不能作出等边直角的"奇数边形"，或者至少作出一个这类的多边形，那末问题就解决了. 从第20题的解已经知道，不存在这一类五边形. 显然，三角形也不具有这种性质. 我们证明，存在着等边的七边形，它的所有的角都是直角.

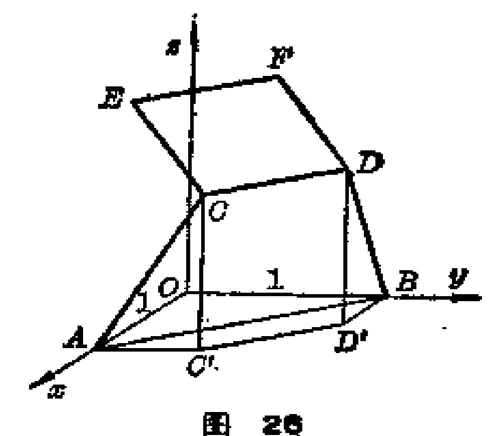


图 26

在空间里引进直角坐标系(图 26). 在 OX 轴和 OY 轴上截取线段 $OA=OB=1$，并作为七边形的边. 在过点 A 平行于平面 YOZ 的平面内，从点 A 出发截取单位长的线段 AC，从点 B 出发，在平行于平面 XOZ 的平面内取单位线段 BD，使 $\angle CAC'=\angle DBD'$，$C'D'=CD=1$. 现在，在梯形 $ABDC$ 所在的平面内作正方形

① 参见本题末从七边形得到九边形的方法，可以从正方形得到等边直角空间 $2n$ 边形. ——译者

$CDef$ (图 27). 显然, 角 ACf(等于角 BDe) 是锐角, 而角 ACf' (等于角 BDe') 是钝角. 因此, 把正方形 $CDef$ 在空间里绕 CD 边转动时, 我们可以找到这样的位置 $CDFE$ (图 26), 使 $\angle ACE = \angle BDE = 90°$.

从作法可知, $ACEFDBO$ 是满足题设条件的七边形.

现在已经不难作出带直角的等边九边形. 为此, 只要在垂直于 $CEFD$(图 26) 的平面里作正方形 $EFGH$, 把它的一条边 EF 抹去. 图形 $ACEHGFDBO$ 就是所求的带直角的等边九边形. 继续在前一个图形的最后一个正方形的垂直平面里作正方形, 我们将逐个得到全部直角等边的"奇数边形".

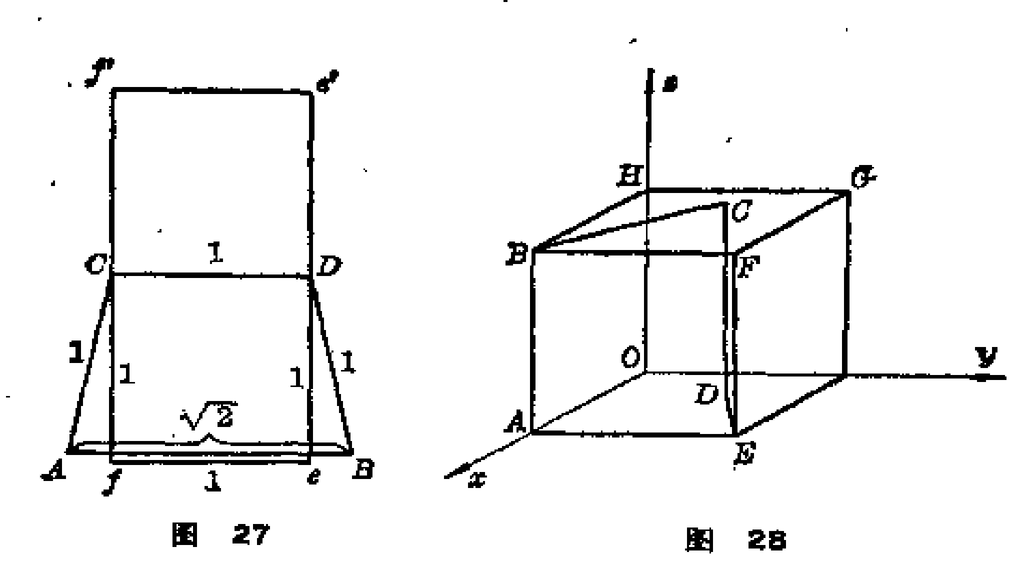


图 27　　　　图 28

注　带直角的等边九角形也容易直接作出, 无需通过作七边形. 事实上, 考虑顶点为 (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1) 的单位立方体(图 28). 在它的界面上取点

$$C=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{和} \quad D\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

那末

$$BC=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\frac{1}{4}}=1,\quad DE=1.$$

22. 这个问题和第16题一样，是汪克尔发动机的几何理论引起的. 但不难知道，本题要作的是固定宽度的曲线. 这个主题在一些文献中屡次考虑过，因此我们不再解答①.

23. 质量等于 BC 边长的质点 A 和质量等于 AB 边长的质点 C，它们的重心 D 在 AC 边上，并且把它分成满足关系式 $AD:DC=AB:BC$ 的两条线段 AD 和 DC. 因此，BD 是角 B 的平分线. 三个质点 A、B、C 形成的质点系的重心，就是两个质点 B、D 的系统的重心，它在角平分线 BD 上. 同理，质点系 A、B、C 的重心在角 A 和角 C 的平分线上，因此与 $\triangle ABC$ 三个内角平分线的交点(即内心)重合.

24. 设有界图形 F 至少有两个外接圆，也就是说，在包含 F 的所有的圆中，有两个半径最小的圆(它们的半径是一样的). 我们把一个圆记为 $K_1(O_1)$，另一个记为 $K_2(O_2)$. 因为它们都包含 F，所以它们的相交部分也包含 F. 考虑以线段 O_1O_2 的中点 O 为圆心，通过点 A、B 的圆(图29)，这里 A、B 是 K_1 和 K_2 的交点. 这个圆包含 K_1 和 K_2 的相交部分，因而包含图形 F，但它的半径 r 小于圆 K_1 和 K_2 的半径 R. 事实上，若 $d=\frac{1}{2}O_1O_2$，则 $r=OA=$

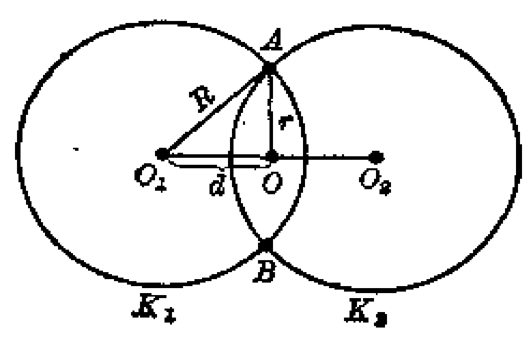


图 29

① 例如，参见《数学万花镜》第54节(裘光明译，中国青年出版社1953年版)，该书图64所画的曲线就是满足本题条件的曲线中的一条. ——译者

$\sqrt{R^2-d^2}$, 故 $r<R$. 这与 R 是包含 F 的最小圆的半径矛盾.

25. 这个问题的回答是肯定的. 为了证明, 我们考虑两种情况.

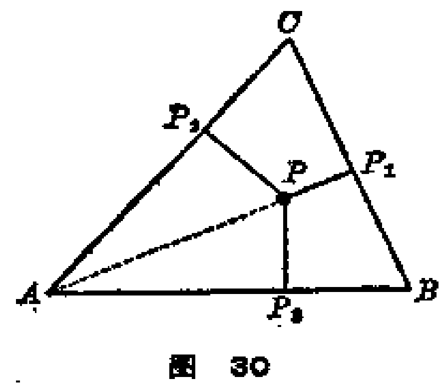


图 30

(1) 锐角三角形 ABC 是等腰的.

例如, 设 $AB=AC=b$.

在 $\angle BAC$ 的平分线上, 截取长 $b/\sqrt{3}$ 的线段 AP, 过 P 点作此三角形各边的垂线(图 30). 设 P_1, P_2, P_3 是它们的垂足.

点 P 在 $\triangle ABC$ 内. 这可由

$$AP=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad AP_1=b\cos\frac{A}{2}$$

得知. 事实上, 因为 $\angle A<90°$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45°<\cos\frac{A}{2}.$$

从而

$$AP_1>\frac{b}{\sqrt{2}},\qquad AP<AP_1.$$

四边形 AP_2PP_3, BP_3PP_1 和 CP_1PP_2 的面积是相等的. 事实上,

$$S_{AP_2PP_3}=AP\sin\frac{A}{2}\cdot AP\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}AP^2\sin A$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}b^2\sin A\right)=\frac{1}{3}S_{ABC}.$$

类似地可计算另两个四边形的面积$\left(\text{都等于}\ \frac{1}{3}S_{ABC}\right)$.

(2) 锐角三角形 ABC 不是等腰的.

不失一般性, 可设它的三个角满足 $A<B<C$.

引进直角坐标系，并且这样地放置 $\triangle ABC$：它的顶点 A 与坐标原点重合，x 轴是角 A 的平分线，顶点 B 在第一象限 $x>0$，$y>0$（图 31）。设 $P(x, y)$ 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，P_1、P_2、P_3 是 P 到边 BC、CA、AB 的垂足．认为角是有向的，我们得到

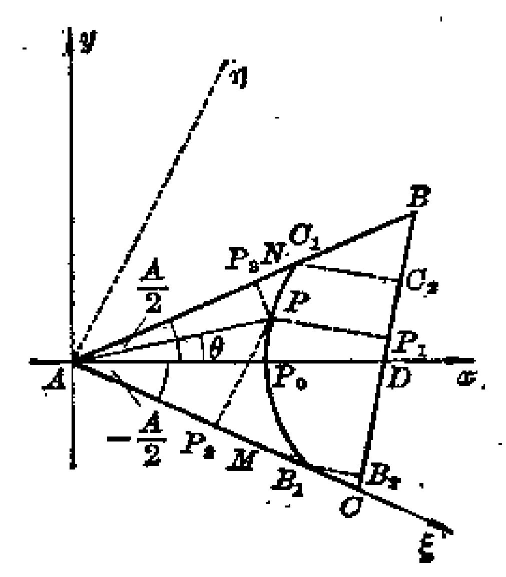


图 31

$$\angle DAB=\frac{A}{2},$$

$$\angle DAC=-\frac{A}{2}.$$

其次，设 $AP=r$（从坐标原点到点 P 的向径的长度），$\angle DAP=\theta$，那末

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

我们计算四边形 AP_2PP_3 的面积：

$$p=\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{A}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\theta\right)$$

$$+\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{A}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{A}{2}+\theta\right)$$

$$=\frac{1}{4}r^2[\sin(A-2\theta)+\sin(A+2\theta)],$$

由此

$$p=\frac{1}{2}r^2\sin A\cos 2\theta, \tag{1}$$

或

$$p=\frac{1}{2}r^2\sin A(\cos^2\theta-\sin^2\theta).$$

以 $r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$ 代入，最后得

$$p=\frac{\sin A}{2}(x^2-y^2). \tag{2}$$

$\triangle ABC$ 的面积按

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A \tag{3}$$

计算，这里 $AC=b$, $AB=c$.

按题设有 $p=\frac{1}{3}S_{ABC}$，从(1)和(3)式得

$$r=r(\theta)=\sqrt{\frac{bc}{3\cos 2\theta}}. \tag{4}$$

从(2)和(3)式得

$$x^2-y^2=\frac{2p}{\sin A}=\frac{2}{\sin A}\cdot\frac{bc\sin A}{6},$$

因此

$$x^2-y^2=\frac{bc}{3}. \tag{5}$$

这样，点 p 在由方程(5)确定的等轴双曲线的弧 $B_1P_0C_1$ 上(图 31).

现在证明，点 B_1 在点 M(线段 AC 的中点)和 C 之间，点 C_1 在点 N(线段 AB 的中点)和 B 之间，从而 $\triangle CB_1B_2$ 和 $\triangle BC_1C_2$ 的面积都小于 $\frac{1}{4}S_{ABC}$.

事实上，在锐角三角形 ABC 内，从不等式 $A<B<C$ 可得

$$BC<AC,\quad \cos B<\cos A,$$
$$BC\cos B<AC\cos A.$$

于是

$$AC\cos A+BC\cos B<2AC\cos A.$$

因此

$$AB=AC\cos A+BC\cos B<2AC\cos A.$$

或

$$c<2AC\cos A.$$

由此 $$\frac{bc}{3\cos A}<\frac{2AC^2}{3}<AC^2,$$

$$\sqrt{\frac{bc}{3\cos A}}<AC.$$

应用(4)式(取 $2\theta=-A$)得

$$AB_1<AC, \tag{6}$$

由此及 $AB_1=AC_1$[见(4)式], $AC<AB$, 得

$$AC_1<AB. \tag{7}$$

因为 $$AB\cos A<AC,$$

当然更有 $$AB\cos A<\frac{4}{3}AC,$$

所以 $$\frac{AB}{4}<\frac{AC}{3\cos A}.$$

上式两边乘以 AB, 得

$$\frac{AB^2}{4}<\frac{AC\cdot AB}{3\cos A}=\frac{bc}{3\cos A},$$

所以 $$AN=\frac{AB}{2}<\sqrt{\frac{bc}{3\cos A}}=AC_1,$$

即

$$AN<AC_1. \tag{8}$$

而由于 $AC_1=AB_1,\quad AM=\frac{AC}{2}<\frac{AB}{2}=AN,$

所以

$$AM<AB_1. \tag{9}$$

从不等式(6)、(9)得知, $AM<AB_1<AC$, 而由不等式(8)和(7)可得, $AN<AC_1<AB$. 这样, B_1 点在 M 和 C 之间, C_1 点在 N 和 B 之间.

现在引进新的坐标系 $\xi A\eta$(使 AC 在 ξ 轴上), 那末

$$\xi=r\cos\left(\theta+\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{bc}{8}\cdot\frac{\cos^2\left(\theta+\frac{A}{2}\right)}{\cos 2\theta}}=\sqrt{\frac{bc}{8}u},$$

$$\eta=r\sin\left(\theta+\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{bc}{8}\cdot\frac{\sin^2\left(\theta+\frac{A}{2}\right)}{\cos 2\theta}}=\sqrt{\frac{bc}{8}v},$$

其中

$$u=u(\theta)=\frac{\cos^2\left(\theta+\frac{A}{2}\right)}{\cos 2\theta},\quad v=v(\theta)=\frac{\sin^2\left(\theta+\frac{A}{2}\right)}{\cos 2\theta}.$$

关于 θ 微分 $u(\theta)$ 和 $v(\theta)$ 得

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{-2\sin\left(\frac{A}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{A}{2}+\theta\right)}{\cos^2 2\theta},$$

$$\frac{dv}{d\theta}=\frac{2\sin\left(\frac{A}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\theta\right)}{\cos^2 2\theta}.$$

这样，在扇形 $-A/2<\theta<A/2\,(0<A<\pi/2)$ 中，$du/d\theta<0$, $dv/d\theta>0$. 因而，线段 AP_2 的长度 $\xi(\theta)$，当 θ 从 $-A/2$ 变到 $A/2$ 时递减，而线段 PP_2 的长度 $\eta(\theta)$ 递增. 由此，四边形 CP_2PP_1 的面积 F 是变量 θ 在区间 $[-A/2, A/2]$ 中的递增函数. 同时，在同一区间里，四边形 CP_2PP_1 是 θ 的连续函数. 根据闭区间上连续函数的著名性质，它取得最小值

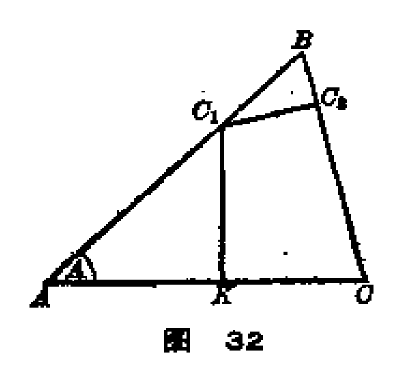


图 32

$$F\left(-\frac{A}{2}\right)=S_{CB_1B_2}<\frac{1}{4}S_{ABC}$$

和最大值

$$F\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{2}{3}S_{ABC}-S_{BC_1C}$$

之间的一切值．若 P 与 C_1 重合(图 32)，则

$$S_{KC_1A}=\frac{1}{2}AC_1^2\sin A\cos A=\frac{1}{2}\frac{bc}{3\cos A}\sin A\cos A$$

$$=\frac{1}{3}S_{ABC}.$$

由此可得

$$F\left(\frac{A}{2}\right)>\frac{2}{3}S_{ABC}-\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{5}{12}S_{ABC}>\frac{1}{3}S_{ABC}.$$

这样一来，对 θ 的某个值 $\theta^*\left(-\frac{A}{2}<\theta^*<\frac{A}{2}\right)$，四边形 CP_2PP_1 的面积等于 $\frac{1}{3}S_{ABC}$．证毕．

26．不难证明，每个有界平面点集，都恰好有一个包含这个集的最小的圆．如果这个集是闭集，那末在这个圆上或者有该集的两个点，它们与该圆的一条直径的端点重合，或者有该集的三个点，它们是某个锐角三角形的三个顶点*.

特别地，由此可得

引理 1 包含平面上三点 A、B、C 的最小圆的半径等于：

(1) $\triangle ABC$ 的最大边的一半，如果 $\triangle ABC$ 是钝角三角形；

(2) $\triangle ABC$ 的外接圆半径，如果 $\triangle ABC$ 是锐角三角形．

这两种情况相互间不排斥，因为直角三角形的外接圆半径等于斜边长的一半．

包含平面点集 S 的最小圆的半径用符号 $r(S)$ 表示．

引理 2 如果点 A'、B'、C' 之间的距离小于点 A、B、C 之间的相应距离，那末 $r(A',B',C')<r(A,B,C)$．

证：只要考虑三种情形：

1. $\triangle A'B'C'$ 是钝角三角形．此时，由引理 1

$$r(A', B', C')=\max\left(\frac{A'B'}{2}, \frac{B'C'}{2}, \frac{C'A'}{2}\right)$$
$$<\max\left(\frac{AB}{2}, \frac{BC}{2}, \frac{CA}{2}\right)$$
$$\leqslant r(A, B, C).$$

2. $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 都不是钝角三角形．由于 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 的内角和相同，所以 $\triangle A'B'C'$ 至少有一个角不小于 $\triangle ABC$ 的对应角．例如设 $\angle A'\geqslant\angle A$．由引理 1，包含 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 顶点的最小圆的半径，等于外接圆的半径．利用正弦定理($BC>B'C'$, $\sin A\leqslant\sin A'$)，得

$$r(A', B', C')=\frac{B'C'}{2\sin A'}<\frac{BC}{2\sin A}=r(A, B, C).$$

3. $\triangle A'B'C'$ 不是钝角三角形，$\triangle ABC$ 是钝角三角形．设 AB 是 $\triangle ABC$ 的最大边，由于 $\triangle ABC$ 是钝角的，所以 $AB^2>BC^2+CA^2$．考虑辅助直角三角形 $A_1B_1C_1$，它的边是 $B_1C_1=BC$，$C_1A_1=CA$，$A_1B_1=\sqrt{BC^2+CA^2}$．

从不等式 $A_1B_1<AB$ 和引理 1，得

$$r(A_1, B_1, C_1)=\frac{A_1B_1}{2}<\frac{AB}{2}=r(A, B, C). \qquad (*)$$

$\triangle A'B'C'$ 不是钝角的，因而，$A'B'^2\leqslant B'C'^2+C'A'^2$．根据原来的假设(即不等式 $B'C'<BC$, $C'A'<CA$)和辅助三角形 $A_1B_1C_1$ 的作法，它的边满足 $A'B'<A_1B_1$，$B'C'<B_1C_1$，$C'A'<C_1A_1$．对 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 应用本引理的情形 2，得

$$r(A', B', C')<r(A_1, B_1, C_1),$$

由此，用不等式(*)得

$$r(A', B', C')<r(A, B, C).$$

引理 2 证毕.

引理 3 如果某个点集 S 的任意三个点含于半径为 r 的圆内，那末整个集 S 也含于半径为 r 的某个圆内.

引理 3 可从下述海莱定理得到:

若有限或无限个平面凸有界图形中，每三个有公共点，则存在一点，它同时属于所有图形.

证 考虑以集 S 的点为心，r 为半径的所有圆之集 K. 由于集 S 的任意三个点都含于半径为 r 的圆内，所以 K 的任何三个圆都有公共点. 由海莱定理得知，存在点 X 属于 K 的所有圆. 以 X 为圆心，r 为半径的圆内就包含了整个集 S. 证毕.

现在考虑两个平面点集 $S=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 和 $T=\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，并且对 $i, j=1, \cdots, n, i\neq j$ 有 $A_iA_j>B_iB_j$.

很明显，当 $n=2$ 时，不等式 $r(T)<r(S)$ 成立.

设 $n\geqslant 3$. 由引理 3，内部包含集 T 的最小圆的半径是数 $r(B_i, B_j, B_k)(i, j, k=1, 2, \cdots, n)$ 中最大的. 例如，设 $r(T)=r(B_{i_0}, B_{j_0}, B_{k_0})$.

由引理 2,

$$r(B_{i_0}, B_{j_0}, B_{k_0})<r(A_{i_0}, A_{j_0}, A_{k_0}),$$

由此式及明显的不等式

$$r(A_{i_0}, A_{j_0}, A_{k_0})\leqslant r(S)$$

得
$$r(T)<r(S).$$

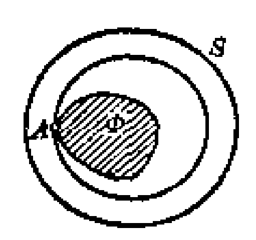
证毕.

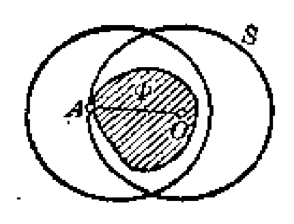
注 用类似的方法也可证明下述定理: 若平面有界闭集 S，在某个压缩变换作用下变换为集 T，则 $r(T)<r(S)$.

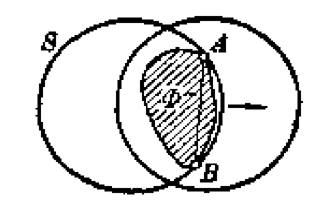
*仿第 24 题容易证明本段的第一句话. 下面证明这一段

的后一句话(摘自 И. М. Яглом 等著《Выпуклые Фигуры》第246～247 页).

情形 1. 如果包含平面图形 Φ 的圆 S 上没有 Φ 的点，那末有比 S 小的圆包含 Φ. 事实上，只要缩小 S 的半径(圆心不变)，直至接触到 Φ 的某个边界点 A 为止，就得到了这样的圆(下图左).







情形 2. 如果 S 上只有 Φ 的一个边界点 A，那末也有更小的圆包含 Φ. 事实上，把 S 沿半径 OA 方向稍移动一下，就化为情形 1(上图中).

情形 3. 如果 S 上有 Φ 的两个边界点 A、B，但它们不是 S 的直径的端点，并且 S 的优弧 AB 上没有 Φ 的其它点(上图右)，那末也有更小的圆包含 Φ. 事实上，把 S 沿垂直于 AB 弦的方向移动一下，仍化为情形 1.

综上所述，包含 Φ 的最小的圆，具有所要求的性质. ——译者

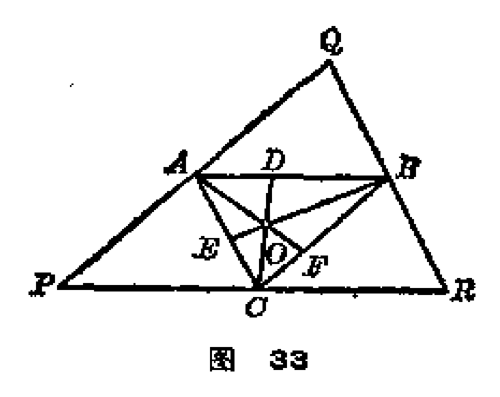


图 33

27. $\triangle PQR$ 各边的重心在它们的几何中心处，即分别与小三角形 ABC 的顶点之一重合(图 33). 因而，整个铁丝三角形 PQR 的重心，与质点系 A、B、C 的重心一致，质点的质量同边长 PQ、QR、RP 成正比例.

两个质点 A、B 形成的系统的重心 D，把线段 AB 分成与集中于 A、B 处的质量成反比的两段：

$$\frac{AD}{DB}=\frac{QR}{PQ}=\frac{AC}{CB}.$$

我们知道，过三角形顶点，并把对边分成与另两边长度成比例线段的直线，是顶角的平分线．因而，质点系 A、B、C 的重心——它同时是质点系 C、D 的重心——在 $\angle C$ 的平分线 CD 上．类似地，质点系 A、B、C 的重心，也应该在小三角形的另两条角平分线 AF 和 BE 上．

注 由于 $\triangle ABC$ 的边与 $\triangle PQR$ 的边成比例，而附在点 A、B、C 处的质量与边 QR、RP 和 PQ 的长度成正比，所以，可以应用已在第 23 题证明过的结论：质点系 A、B、C 的重心与 $\triangle ABC$ 的内心重合．从这一结论立即可以推得本题的结论．

28．数 $b_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 应满足的充要条件，可表示为不等式组 $\sum\limits_{i\neq k} b_i > b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 或等价的不等式组 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k > 2b_{\max}$，这里 $b_{\max}$ 表示 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中最大的一个．

29．问题的回答是否定的．以 b_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 为边的 n 边形的最大面积与边的次序无关．事实上，如图 34，对换边 b_i 和 b_{i+1} 不改变多边形的面积．而通过这样的对换（交换相邻两边）可以把边 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 排列成任何次序．

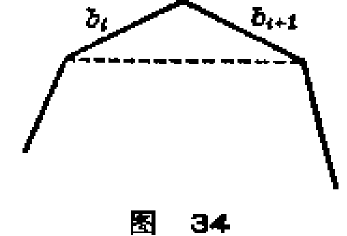


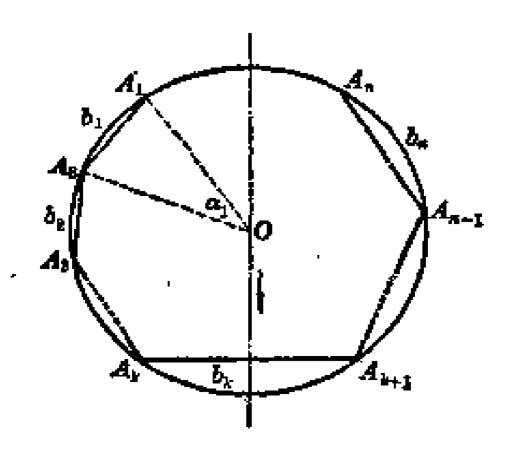
图 34

30．本题的完整证明见 Д. А. Крыжановский 著《Изопериметры》一书第 52～55 页．

〔该书译者未见到，以下是另一证明．

设 $b_n=\max(b_1, \cdots, b_n)$．

作半径充分大的圆. 在该圆上依次(向一个方向)截取长为 $b_1, \cdots, b_n$ 的弦, 则当半径 r 充分大时, 折线 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 不闭合, 各弦所对的圆心角的和(见左图)



$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n<2\pi.$$

令 $r\to b_k/2$. (例如可让圆心 O 在弦 b_k 的垂直平分线上向 b_k 移动), 则当 $r=b_k/2$ 时可有两种情况发生:

(1) 折线 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 闭合,

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n\geqslant 2\pi.$$

此时, 由于

$$f(r)=\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\sum_i 2\arcsin\frac{b_i}{2r}$$

是 r 的连续函数, 根据中间值定理, 存在 r_0, 使

$$f(r_0)=2\pi.$$

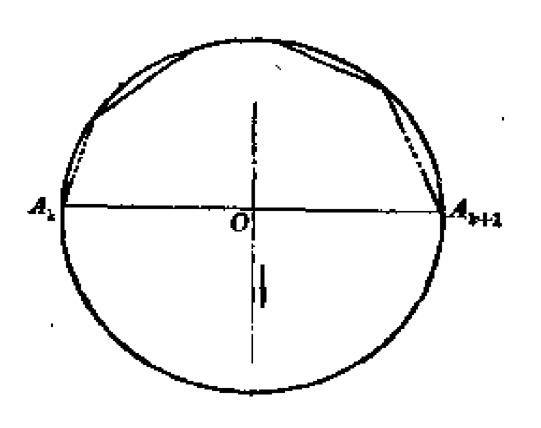
这说明与此相应的 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 是所求的内接 n 边形.

(2) 折线 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 不闭合, 即仍有

$$f(r)<2\pi,$$

$$\left(r=\frac{b_k}{2}\right).$$

此时, 仍让圆心 O 沿原来的方向移动, 即令 $r\to\infty$ (注意, 在此过程中折线 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 落在半圆内). (见右图)



弧 b_k 所对的劣弧长

$$l(r)=r\alpha_k=2r\arcsin\frac{b_k}{2r}.$$

它的极限

$$\lim_{r\to\infty}2r\arcsin\frac{b_k}{2r}=b_k. \qquad (*)$$

由于 $b_1, \cdots, b_n$ 形成 n 边形，从第 28 题应有

$$b_1+\cdots+b_{k-1}+b_{k+1}+\cdots+b_n>b_k.$$

设 b 满足

$$b_1+\cdots+b_{k-1}+b_{k+1}+\cdots+b_n>b>b_k.$$

由(*)式，当 r 充分大时应有

$$l(r)<b.$$

即 $$b_1+\cdots+b_{k-1}+b_{k+1}+\cdots+b_n>l(r).$$

这说明 r 充分大时折线 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 必闭合，从而同情形(1)讨论可知，存在要求的圆内接 n 边形。——译者〕

31. 见下题的解.

32. 第 31 和第 32 题形成一个整体，因此它们的解答也可以合起来一起考虑。

我们先证明，用 n 个圆至多把平面分成 $n(n-1)+2$ 部分。

用归纳法证明．当 $n=1$ 时结论是真的：一个圆把平面分成两部分．

设 P_n 表示用 n 个圆把平面分成的最多部分数，并且设 $P_n\leqslant n(n-1)+2$.

现在作第 $n+1$ 个圆．它可以与其它的圆交于 s 个点，这里 $0\leqslant s\leqslant 2n$.

当 $s>0$ 时，这 s 个点把第 $n+1$ 个圆分成 s 段弧．每一段弧连接平面的两部分．因而每一段这样的弧，最多产生平面的一个新的部分，s 的最大值 $s=2n$，给出 $2n$ 个新部分．

利用归纳假设得

$$P_{n+1}\leqslant P_n+2n\leqslant n(n-1)+2+2n$$
$$=n^2+n+2=(n+1)n+2.$$

这就完成了本题第一部分的证明.

从这个证明可知，4 个圆至多把平面分成 14 部分. 因此不管如何分布四个圆，都不能把平面分成 16 部分.

现在证明，半径相同的 n 个圆，可以把平面分成 $n(n-1)+2$ 部分. 为此，考虑单位线段 AB. 把它用点 A_1, A_2, A_3, …, A_{n-2} 分成 $n-1$ 等分. 以点 A, A_1, …, A_{n-2}, B 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径作 n 个圆，我们得到一个圆族，其中任何两个圆都相交，因为它们的圆心距小于半径之和. 不难证明，在任何一点都不会有两个以上的圆相交. 因而，作为这个圆族中两圆交点的点，总共有 $2C_n^2=n(n-1)$ 个，并且在每个圆上有 $2(n-1)$ 个这样的点. 这些交点把各个圆分成 $2(n-1)$ 段弧，把整个圆族分成 $2n(n-1)$ 段弧. 根据欧拉公式，弧的段数等于交点个数与平面被分成的部分数的和减 2，所以所求的部分数等于

$$2n(n-1)-n(n-1)+2=n(n-1)+2.$$

证毕.

33. 由于对每个非凸多边形可以作一个各边相等而面积较大的凸多边形，所以只要对凸六边形证明这个问题.

我们知道，在周长相同的凸多边形中，正多边形有最大面积. 因此，如果 S 是边长小于 1 的任意凸多边形的面积，那末 $S<3\sqrt{3}/2$，此式右边的数是边长为 1 的正凸六边形的面积. 不难知道，$\frac{3}{2}\sqrt{3}<\frac{3}{2}\times1.732=2.598<2.6$. 因而

$S<2.6$. 证毕.

34. 首先注意到,内部有 n 个已知点的卵形本身,实际上不起任何作用,因为平面上任取的 n 个点,总可以包含在某个卵形内。如果不考虑限制 n 个已知点的卵形,那末原先与卵形有公共点的折线用射线代替.

为简单起见,采用下述记号. 设 $Y1$ 是问题的第 1 个条件,它说,在每个多边形部分的内部,只有 n 个已知点中的一个;$Y2$ 是问题的第二个条件,这个条件说,任何一部分的主人,到"自已的"点比到"别人的"点近.

在着手解决这个问题之前,先考虑两种特殊情况:

(1) $n=1$. 此时 $L(1)=0$. 事实上,如果 $n=1$ 时,L 的值大于 0,那末违背条件 $Y1$.

(2) $n=2$. 此时 $L(2)=1$. 事实上,线段 P_1P_2 的垂直平分线形成的篱笆满足条件 $Y2$. (我们假定,各部分的主人都是不爬篱笆的庄重的人.) 因此,$L(2)\geqslant 1$. 再排一条既不违反 $Y1$,又不违反 $Y2$ 的篱笆是不可能的,因而 $L(2)=1$.

现在证明,各部分之间的边界有下列性质:

(1) 折线的各节(它们可以是有限的线段,也可以是半无限的射线)在 $P_iP_k(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i\neq k)$ 的垂直平分线上.

(2) 在任一线段 P_iP_k 的垂直平分线上,只能有折线网络的一节.

证明性质(1). 设内部包含点 P_i 的篱笆,有一节不在任何一条线段 $P_iP_k(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i\neq k)$ 的垂直平分线上. 如果在篱笆这一节的旁边有某个已知点 P,显然违反条件 $Y2$,如果在这一节旁边一个已知点都没有,那末又违反条件 $Y1$. 这样,性质(1)得证.

证明性质(2). 设在 P_iP_k 的垂直平分线上，至少有折线网络的两节. 由于它们分布在一直线上，所以应该用顶点(图35)或某个折线网络(图 36)分开.

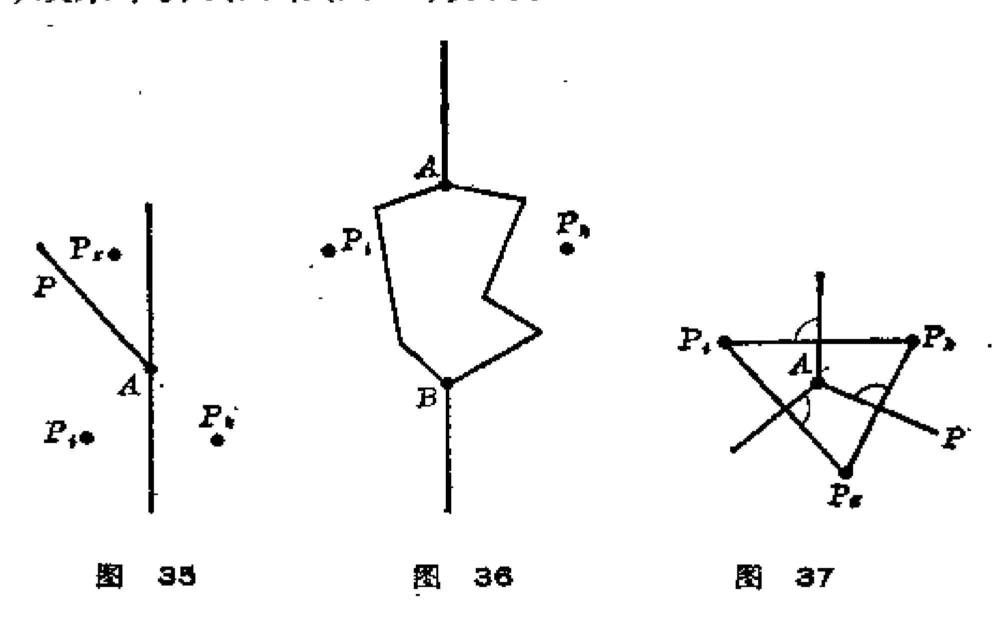


图 35　　图 36　　图 37

第一种情形，这个折线网络至少应该还有一节 p 从顶点 A 出发. 因此，包含某点 P_x 的部分与顶点 A 连接，如果 S 是 P_iP_k 的中垂线，那末它不能同时是 $P_xP_k(x\neq i)$ 的中垂线. 同时，如果在与顶点 A 连接的各部分中，有一部分没有任何已知点，那末违背条件 $Y1$.

第二种情形，设折线网络的某一节 p 从顶点 A 出发(图37). 这一节旁边应有包含已知点之一(记为 P_x)的部分. 点 P_x 唯一地确定点 P_i、P_k 的位置，因而也唯一地确定从 A 点出发的折线网络另一节的位置. 对 B 点进行类似的讨论，可以找到点 P'_x, P'_i, P'_k, 并且 $P'_i=P_i$, $P'_k=P_k$, 但 $P'_x\neq P_x$. P'_xP_i 和 P'_xP_k 的垂直平分线应该交于 B 点，但这是不可能的，因为有公共始点的两条线段的对称轴，或者平行，或者交于这两条线段所成的凸角内. 如果折线网络的结点连接三个以上的部

分(图 38)，仿上讨论，同样导致矛盾．这样，性质(2)得证．

现在考虑按本题条件分隔的点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的任意构形①．篱笆(在平面中)形成某个平面图形 G．我们用下述方法作对偶于图形 G 的图形 G^*：在每一部分(包括无界部分)任取一点，例如点 P(显然，这样的点恰好有 n 个)；如果点 P_i 和 P_k 所属的部分是邻接的，那末把这两个点连接起来(这样得到图形 G^* 的连接顶点 P_i 和 P_k 的边)．由性质(2)，任何一对点 P 至多只能用一条边连接．所作的图形 G^* 与 G 一样是平面的，而它的边数等于折线网络的节数(即图形 G 的边数)．这就有了问题：如果每一对顶点至多以一条边连接，有 n 个顶点的平面图形，它的最大边数等于什么？利用图 39，不难计算，$n \geqslant 3$ 时，具有所求性质的图形，至多有 $3(n-2)$ 条边．由于计算的结果与图形的画法无关，而仅由它的拓扑性质确定，我们得到不等式：

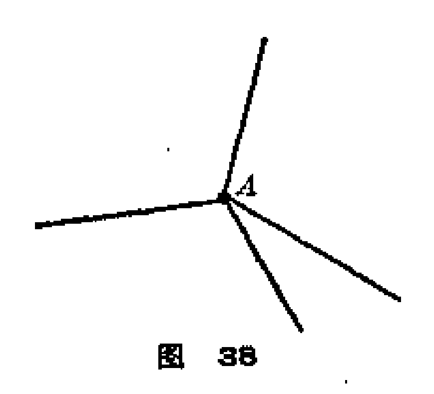


图 38

$$L(n) \leqslant 3(n-2).$$

我们证明，$n \geqslant 3$ 时，上述不等式实际上成为等式 $L(n) = 3(n-2)$．为此只要证明，对任意的 $n \geqslant 3$，可以找到 n 个点的这样的构形，使折线网络的节数等于 $3(n-2)$．我们举出这种构形的例子．

把从公共顶点 O 出发的、把平面分成彼此邻接的六部分

---

① (平面)构形是由平面上的点和直线这样地构成的图形：每个点结合相同条数的直线，每条直线结合相同个数的点．关于构形和下文讲到的对偶图形及第 82 题提到的对偶性原理，可参见 D. 希尔伯特、S. 康福森著《直观几何》上册(王联芳译，江泽涵校订，人民教育出版社)第 97, 119, 94 页．——译者

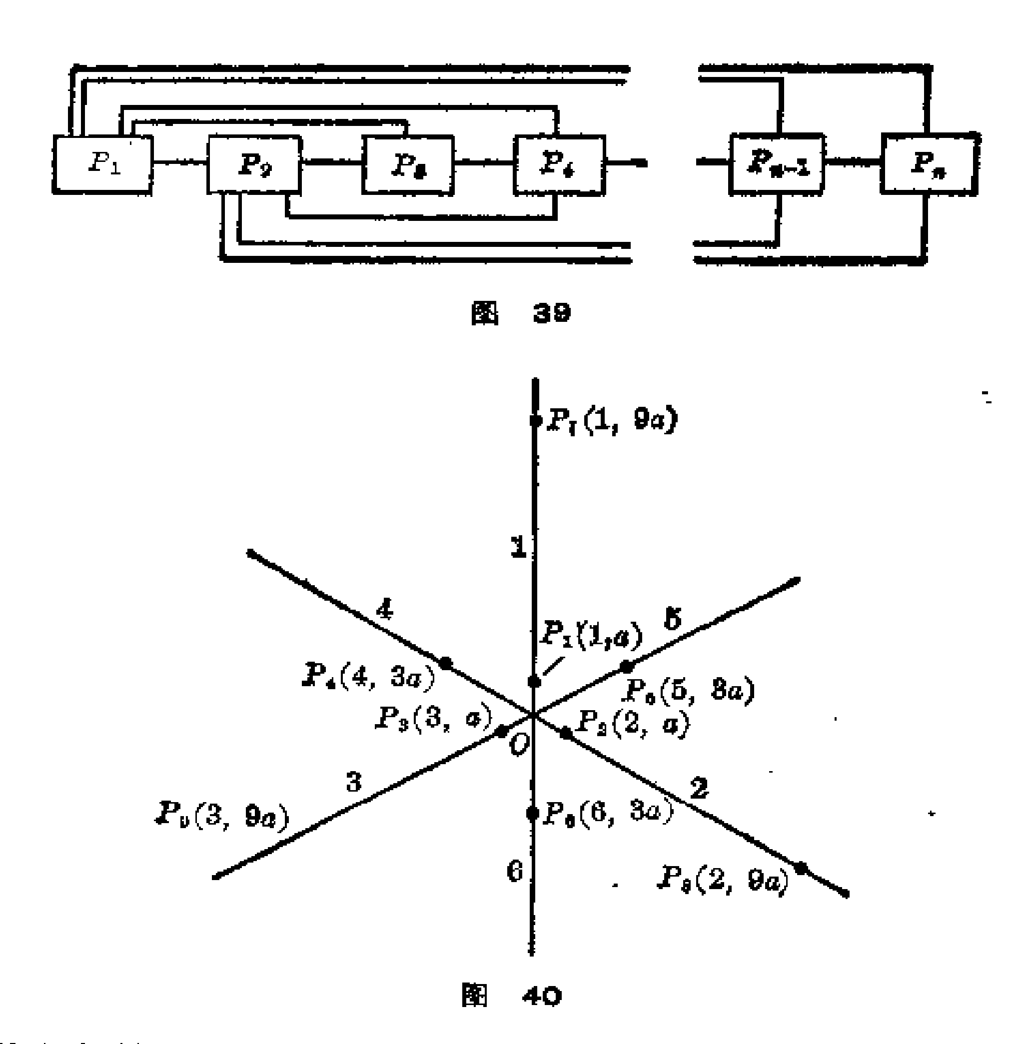


图 39

图 40

的六条射线，如图 40 所示那样编号．我们以 $P(m, a)$ 表示第 m 条射线上，距顶点 O 的距离为 a 的点 P．当 $n\equiv 0 \pmod 3$ 时，点

$$
\left\{\begin{array}{lll}
P_1(1,\ a), & P_2(2,\ a), & P_3(3,\ a), \\
P_4(4,\ 3a), & P_5(5,\ 3a), & P_6(6,\ 3a), \\
P_7(1,\ 9a), & P_8(2,\ 9a), & P_9(3,\ 9a), \\
P_{10}(4,\ 27a), & P_{11}(5,\ 27a), & P_{12}(6,\ 27a), \\
P_{13}(1,\ 81a), & \cdots &
\end{array}\right. \tag{1}
$$

形成了我们所需要的构形．

当 $n\equiv1 \pmod 3$ 时，点 P_n 放在星形的中心处(即射线的公共顶点处——译者)．为符号一致起见，把点 P_n 的坐标看作 $(x+1, 0)$，其中 x 是点 P_{n-1} 所属的射线的号码．

当 $n\equiv2 \pmod 3$ 时，点 P_{n-1} 放在星形的中心处，而点 P_n 按法则(1)放置．

我们解释图 41．设 $n>12$．在 $n\equiv0 \pmod 3$ 时，折线节先形成(如果从星形中心起算)三个五边形，然后又形成与前三个相似的三个五边形(相似系数等于 3)，$n-12$ 个相似六边形(相似系数 3, 9, 27 等等)，然后又是三个有限的五边形，最后是三个无界的五边形．这样一来，这个构形里折线网络的总节数

$$N=\frac{1}{2}[3.5+3.5+6(n-12)+3.5+3.5]=3(n-2).$$

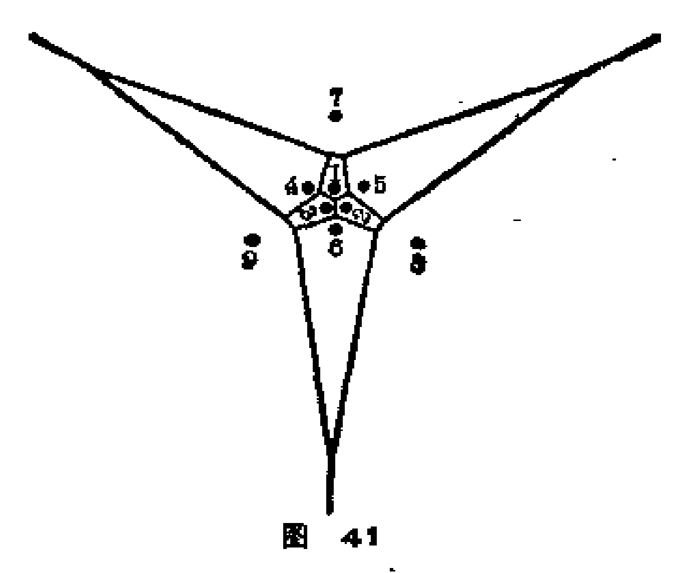


图 41

当 $n\equiv1 \pmod 3$ 和 $n\equiv2 \pmod 3$ 时，得到的图形不需要独立画出．因为不难看出，在星形中心添加一个新的点，只引起图形中心部分的变化，最靠近中心的五边形变为六边形，中心附近产生一个等边三角形．如此，在星形中心添加一个点

时，折线网络的节数增加 3. 再添加一个点（图 43），也只引起图形中心部分的变化——使折线网络的节数增加 3（比较图 41、42、43，如何从图 41 得到 42 和 43 是明显的）. 连接已知点的线段可以划分为一列线段族：

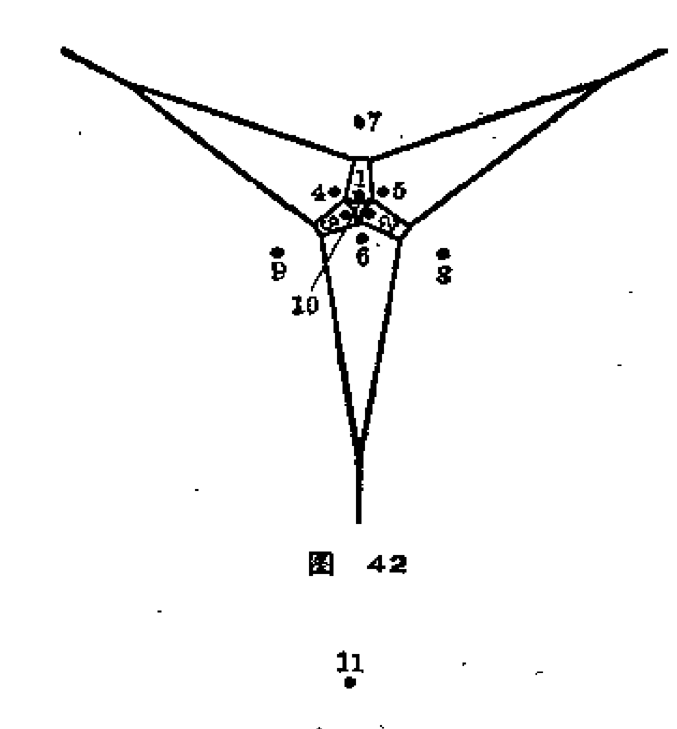


图 42

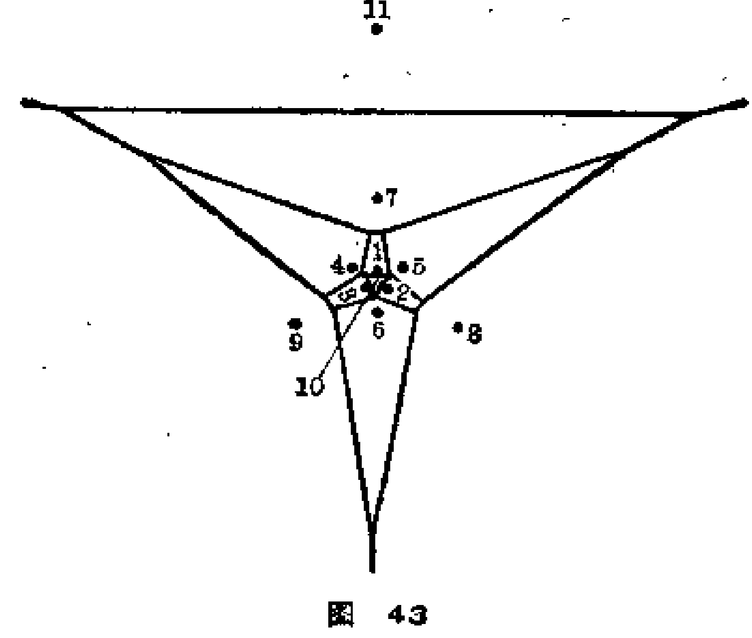


图 43

$$P_1P_4 /\!/ P_7P_{10} /\!/ P_{13}P_{16} \text{ 等等},$$

$$P_4P_7 /\!/ P_{10}P_{13} /\!/ P_{16}P_{19} \text{ 等等},$$

以及类似的端点在其它各对射线上的线段族. 把这些线段族都写出来, 便可知道各部分的相似性(我们已对 $n \equiv 0 \pmod 3$ 时的构形, 说过这种相似性), 以及图形作法的可实现性. 当 $n \leqslant 12$ 时不难直接进行考察.

这样, 我们证明了, $L(1)=0$, $L(2)=1$, 以及 $n \geqslant 3$ 时, $L(n)=3(n-2)$.

85. 这 23 个点把该圆分成 23 条弧, 设它们依次是 a_1, a_2, $\cdots$, a_{23}. (可以从任何一条弧开始编号. 在解题过程中各弧的号码保持不变.) 先证明结论 I.

在圆 K 上可以放置七段每段长 7 cm 的弧, 其中至少有一段弧所含集 Z 的点要少于 4 个, 否则 Z 的点数将大于或等于 28, 与题设矛盾. 用 AB 表示这样的一段弧. 如果 AB 弧恰好包含 Z 的 3 个点, 那末结论 I 已证得.

如果 AB 弧所含的 Z 的点数少于 3 个(即, 如果集 Z 属于 AB 弧的点数等于 0, 1 或 2), 那末让它沿圆 K 运动, 使它的端点 A 依次与集 Z 的点重合. 我们证明, 在 A 与这些点之一重合时, AB 弧恰好含集 Z 的 3 个点. 事实上, 如果不是这样, 对 $k=1, 2, \cdots, 23$ 有

$$a_k + a_{k+1} > 7$$

(a_{24} 理解为 a_1), 由此

$$\sum_{k=1}^{23} (a_k + a_{k+1}) > 23 \cdot 7.$$

但

$$\sum_{k=1}^{23} a_k = 50,$$

因而从后一个不等式有 $2 \cdot 50 > 23 \cdot 7$. 这是不可能的.

现在证明结论 II.

为此需要证明，对某个 $k(1\leqslant k\leqslant 23)$ 同时成立不等式

$$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}<7,\ a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}>7,$$

其中 $$a_{24}=a_1,\ a_{25}=a_2,\ a_{26}=a_3.$$

事实上，否则将有

$$\sum_{k=1}^{23}(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\geqslant 23\cdot 7$$

或 $$\sum_{k=1}^{23}(a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3})\leqslant 23\cdot 7,$$

即 $$3\cdot 50\geqslant 23\cdot 7\quad 或\quad 4\cdot 50\leqslant 23\cdot 7.$$

这是不可能的.

如此，两个结论都已证得.

36. 首先证明，如果底边相等、顶点在底边同一侧(例如"上侧")的两个等腰三角形，它们的六个顶点与某个凸六边形的顶点重合，α 是底边"在下面"的三角形的底角，β 是另一个三角形的底角，那末 $\alpha>\beta$.

由这两个三角形顶点形成的六边形是凸的，它们的底边不会在一直线上，而且它们的顶点也不可能有重合的. 我们证明，无论这两个三角形相交还是不相交，$\alpha>\beta$ 都成立.

事实上，在相交时(图 44)，因为

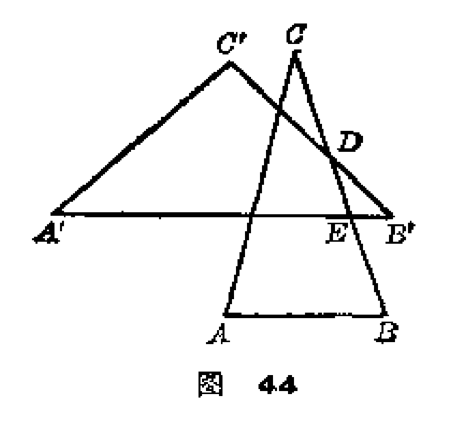


图 44

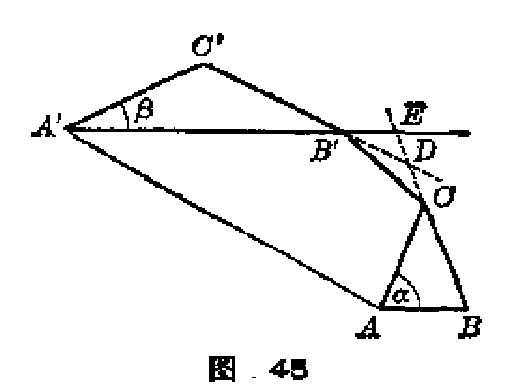


图 45

$$\angle C'DC=180^\circ-(\angle DEB'+\angle\beta)=\alpha-\beta,$$

所以，如 $\alpha\leqslant\beta$，应有 $\angle C'DC\leqslant 0$. 换句话说，顶点 C 将在 $\triangle A'B'C'$ 上.

在不相交时(图 45)，

$$\angle B'DE=180^\circ-(\angle B'ED+\angle DB'E)=\alpha-\beta,$$

因而 $\alpha\leqslant\beta$ 时，BC 边的延长线与 $\triangle A'B'C'$ 相交，$A'C'B'CBA$ 不是凸六边形.

现在，假定本题所说的凸多边形存在. 我们考虑它的与两个平行十字形端点重合的顶点. 十字形的端点是凸八边形的顶点. 去掉十字形"下面的"端点后，我们得到两个等腰三角形，按刚才所证，它们的底角满足 $\beta<\alpha$. 去掉十字形"上面的"端点后，又得到两个等腰三角形，而且应满足 $\alpha<\beta$. 这两个矛盾不等式证明：两个平行十字形的端点，不可能成为凸八边形的顶点.

37. 因为圆面积等于 10 个基本正方形的面积，所以它的半径 $r=\sqrt{10/\pi}$. 我们证明，以坐标是 $x_0=0$, $y_0=1/4$ 的点为圆心，$\sqrt{10/\pi}$ 长为半径的圆，恰好包含单位正方形网格的 10 个格点：A_{12}、A_{13}、A_{14}、A_{17}、A_{18}、A_{19}、A_{22}、A_{23}、A_{24}、A_8(见图 46). 它不包含其它任何格点.

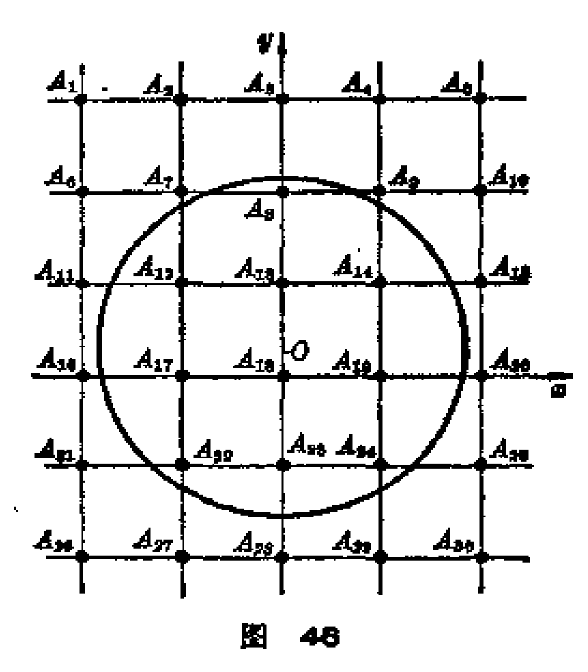


图 46

首先证明，上面所说的圆包含点 A_{24}，从而包含上面列出的头九个格点. 我们有

$$OA_{24}^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2+1=\frac{25+16}{16}=\frac{41}{16}<\frac{10}{\pi}=r^2.$$

其次，证明这个圆包含点 A_8:

$$OA_8^2=\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49}{16}<\frac{10}{\pi}.$$

最后证明其它格点都不属于这个圆．为此只要证明点 A_{28}、A_{20}、A_9 在圆外．依次计算这些点到圆心的距离的平方，得

$$OA_{28}^2=\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81}{16}>\frac{10}{\pi},\quad OA_{20}^2=\frac{1}{16}+4=\frac{65}{16}>\frac{10}{\pi},$$

$$OA_9^2=\left(\frac{7}{4}\right)^2+1=\frac{65}{16}>\frac{10}{\pi},$$

证毕．

38．如图 1 引进记号后，我们可写出方程组

$$\begin{cases} y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+h=1, \\ y^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=x^2, \\ h^2+\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^2=x^2. \end{cases}$$

从第二和第三个方程得

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=y^2-h^2.$$

由于
$$1-\frac{x\sqrt{3}}{2}=y+h,$$

所以
$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=(y-h)\left(1-\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

这样，我们得到两个方程的方程组

$$\begin{cases} y-h=\dfrac{\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}}{1-\dfrac{x\sqrt{3}}{2}}, \\ y+h=1-\dfrac{x\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

经过简单的变形后,

$$y=\frac{2+2x^2-(1+2\sqrt{3})x}{2(2-x\sqrt{3})}.$$

把此式代入第一个方程组的第二个方程, 在进行了十分令人厌烦但不复杂的变形后,得到下列 x 的四次方程:

$$2x^4-(2\sqrt{3}-1)x^3-(\sqrt{3}+2)x^2+(3\sqrt{3}+1)x-2=0.$$

显然, $x=1$ 是它的一个根, 但不合题意. 把方程左边的多项式除以 $x-1$, 得三次方程

$$2x^3-(2\sqrt{3}-3)x^2-(3\sqrt{3}-1)x+2=0.$$

令 $x=z+(2\sqrt{3}-3)/6$, 把它变形为

$$z^3+pz+q=0,$$

其中 $$p=-\frac{2\sqrt{3}+5}{4},\quad q=\frac{7\sqrt{3}+18}{36}.$$

不难验证,

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0,$$

据此,这个三次方程有三个不同的实根,它们可按公式

$$z_k=2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{1}{3}(\varphi+2k\pi)$$

计算, 这里 $k=0, 1, 2$; $\cos\varphi=-q/2\rho$, $\rho=(\sqrt{-p/3})^3$.

对于上面所说的系数 p、q 的值, $\cos\varphi\approx-0.706$, 因此 $\varphi\approx3\pi/4$.

由本题条件可知, $1/2<x<1$. 上述三次方程,只有对应

于 $k=2$ 的那个根满足这个不等式．这样，

$$z=2\sqrt{\frac{2\sqrt{3}+5}{12}}\cos\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+2\cdot2\pi\right)\approx0.435.$$

因而

$$x=z+\frac{2\sqrt{3}-3}{6}\approx0.435+0.0774\approx0.512.$$

知道了 x，不难求得

$$y\approx0.11,\ h\approx0.45.$$

39．回答这个问题与我们是不是把两个镜面对称的四面体，看作不同的四面体有关．在看作不同的时候，由小棒搭成的不同四面体有 60 种，看作相同的时候有 30 种．我们证明这一结论．

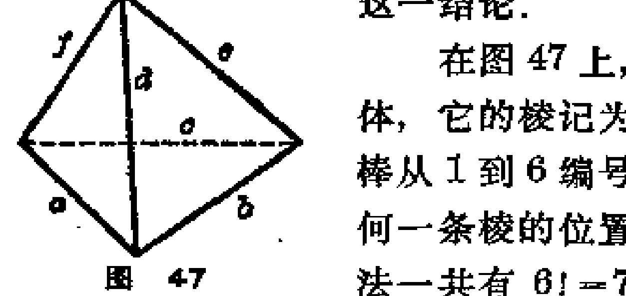


图 47

在图 47 上，简单地画出了一个四面体，它的棱记为 a、b、c、d、e、f．把小棒从 1 到 6 编号．每根小棒可以放在任何一条棱的位置．这样，放置小棒的方法一共有 $6!=720$ 种，即六件物体的全排列数．但是，并非所有排列都能成为不同的四面体．有些四面体只是放置的位置不同．

暂时设图 47 上的四面体各条棱的长相等，我们考虑作这样的四面体，有多少种不同的方法．(“作好的”四面体应在图 47 所示的“标准”位置上.)我们指出：(1)它的任何一个界面都可作它的底面；(2)它的底面是等边三角形，放置这个三角形可以有三种不同的方法．因此，对同一个四面体，我们总共得到 $3\cdot4=12$ 种不同位置(同时也是棱与原有四面体的棱重合的四面体的全部可能位置)．

考察把小棒 1～6 配置于棱 a～f 的所有 720 种情形．由

于每个被搭成的四面体，在不同位置出现 12 次，所以由六根不同长度的小棒，所能搭成的不同的四面体，共有 $720\div12=60$ 种．如果不区分镜面对称的四面体，那末不同四面体的个数要减少一半，等于 30.

40. 小立方体的内界面，即彼此邻接的界面，在三对平行平面上．图 48 表示其中的一对．“戳通”立方体的直线 l，最多能把六个平面都戳通一个点．因为直线 l 与小立方体的棱不相交，所以它与大立方体的内界面至多有六个交点．此外，直线 l 可以与两个外界面相交．这样，l 与立方体界面的交点总共不超过 8 个．也就是说，它至多“戳通”7 个小立方体．

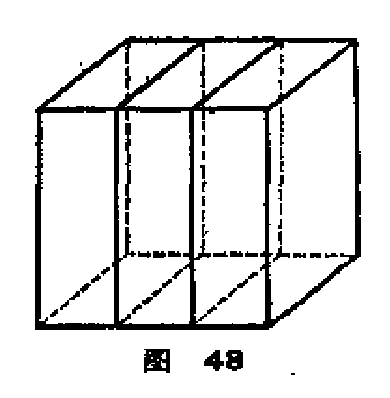


图 48

为了能作出通过 7 个小方块的直线 l，我们把 27 个小方块编号．如图 49 所示，每个小圈代表一个小立方体，每个小立方体用三个数表示．第一个数代表它所在的水平层次的号码（从下向上数），第二个数代表平行于前侧面的纵层次的号码（从前往后数），第三个代表平行于左侧面的纵层次的号码（从左向右数）．如果两个小立方体只有一个数码不同，例如 111 和 211，213 和 223，221 和 222，那末这些小立方体有公共的界面．第一种情形里是水平的，第二种是前侧的，第三种是左

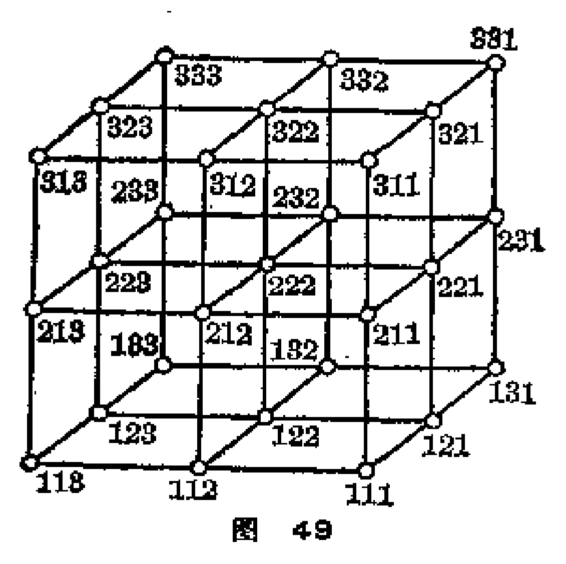


图 49

侧的.

由于直线 l 不通过任何一条棱，“被戳通的”正方形不可能彼此仅仅用棱连接，而应有公共界面. 因而，如果把被直线 l 戳通的小立方体的号码，按它们穿在直线 l 上的次序写出，例如

$$111,\ 211,\ 221,\ 222,\ 322,\ 332,\ 333, \qquad (1)$$

那末我们得到一个序列. 在这个序列中，相邻的号码只有一个数码不同，并且只差 1，而第一，第二，第三个数码分别形成非减或非增序列. 不难明白，只有在大立方体对角线两端的两个小立方体穿在直线 l 上时，l 才能穿过 7 个小立方体. 这样的小立方体可以是 111 和 333，113 和 331，131 和 313，133 和 311. 事实上，只有在这时，我们才能使数码变化六次(每次增大或减小 1)，从而使所得到的 7 个小立方体串在直线 l 上.

显然，如果 l 通过对角线两端的两个小立方体，例如通过 111 和 333，那末它也通过中心的小立方体 222.

选择如图 49 那样分布的小圆作为顶点，可以把小立方体序列(1)用图表示(图 50). 在这样的图形里，沿纵线移动时第一个数码变动 1，沿斜线移动时第二个数码变动 1，沿横线移动时第三个数码变动 1.

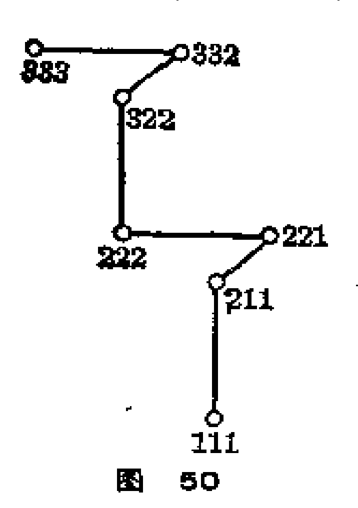


图 50

如果给定 l 上的两点，例如在立方体 111 和 333 里的点，那末 l 的位置被确定. 把大立方体投影到两个互相垂直的平面上(一个平面平行于底面，另一个平行于前侧面)，并且在小立方体 111 和 333 内任取点 (P', P'') 和 (Q', Q'')(图 51)，我们总得到

贯穿 7 个小立方体的直线 l（只要 l 与任何一条棱都不相交）.

图 51 所示的情形，直线 l 从点 1 穿出小立方体 111 进入 211，在点 2 从小立方体 211 进入 212，然后在点 3 进入小立方体 222，在点 4 进入 223，在点 5 进入 323，最后，在点 6 进入 333. 直线 l 与某小立方体的棱相交意味着：l 与小立方体内界面的交点 1, 2, …, 6 中，某些点两两重合（在图 51 中不发生这种情况）. 这个条件也可以换一种形式表达，无论在大立方体的那一个投影上，直线 l 都不通过网格的格点，这个网格是把大立方体的投影分成小立方体投影构成的，或者说，此直线的投影 l' 和 l'' 都通过 5 个小正方形.

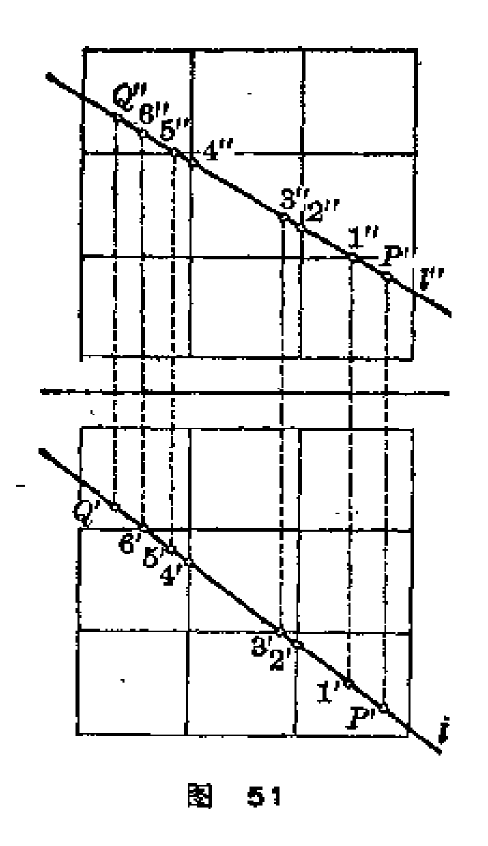


图 51

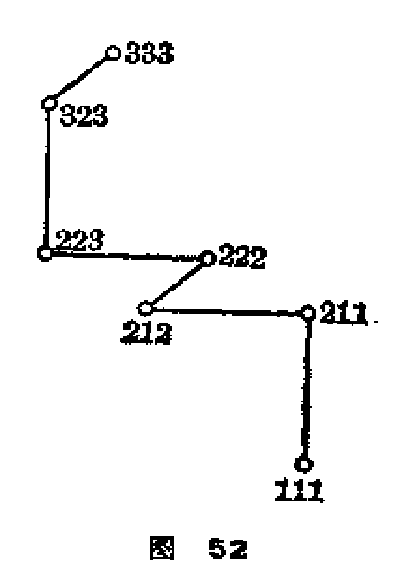
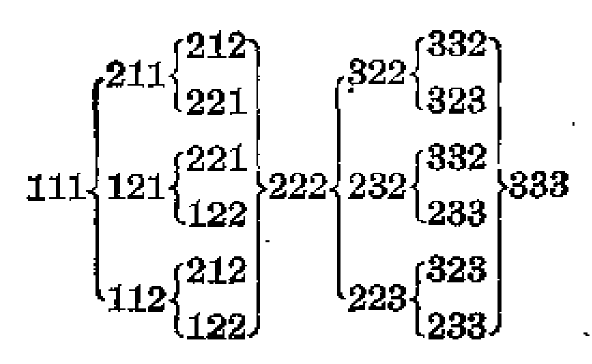


图 52

图 51 所示的串在直线 l 上的 7 个小立方体分布如图52.

通过小立方体 111 和 333 的直线 l，可以用 36 种不同的方法穿过 7 个小立方体，这些方法可以用这样的格式写出：



这些不同的穿法可以如下得知．取被直线 l 从小立方体 111 穿到 222 的一组小立方体．把这组立方体绕大立方体对角线转动 120°，然后再转动 120°，便得到图 53 所示的三组小立方体．取与这三组小立方体关于对角线平面（通过大立方体底面对角线和中心的平面）对称的立方体组，我们又得到了三组（图 54）．

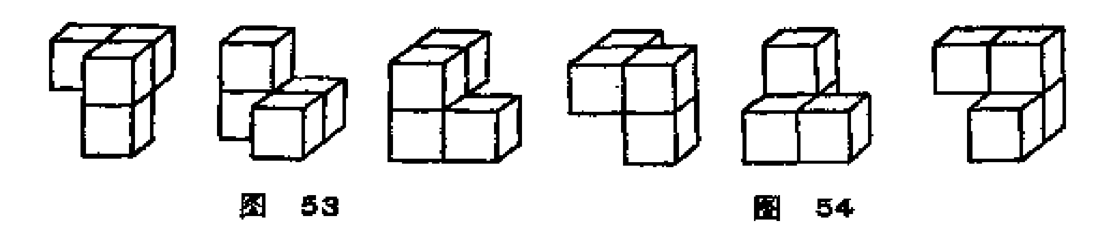


图 53　　　　图 54

从小立方体 222 到 333，直线 l 也通过六组不同的小立方体．把前面 6 组与后面 6 组（彼此独立地）结合起来，我们得到把 7 个小立方体穿在一条直线上的全部 36 种方法．

41．如果把图 55 里虚线表示的球放在用实线表示的球的上面，我们就得到了最紧密的球结构．

四个单位球之间形成小空隙（在图 55 里，是以 A、B、C、D 为圆心的球之间）．因为这些球彼此相切，所以它们的球心位置在正四面体 $ABCD$ 的顶点，四面体的棱长为 2（图 56）．能够放进这种小空隙的最大半径（设为 r_1）的球，与四个单位球都相切，它的中心与四面体的高的交点重合．

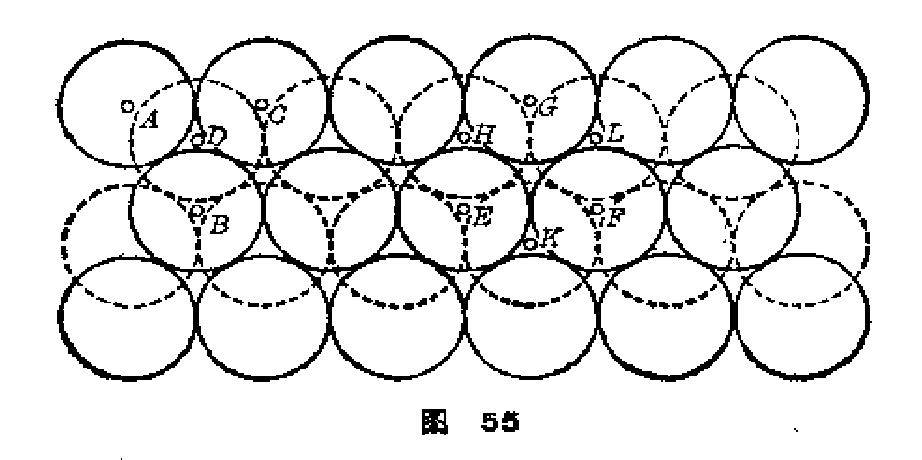


图 55

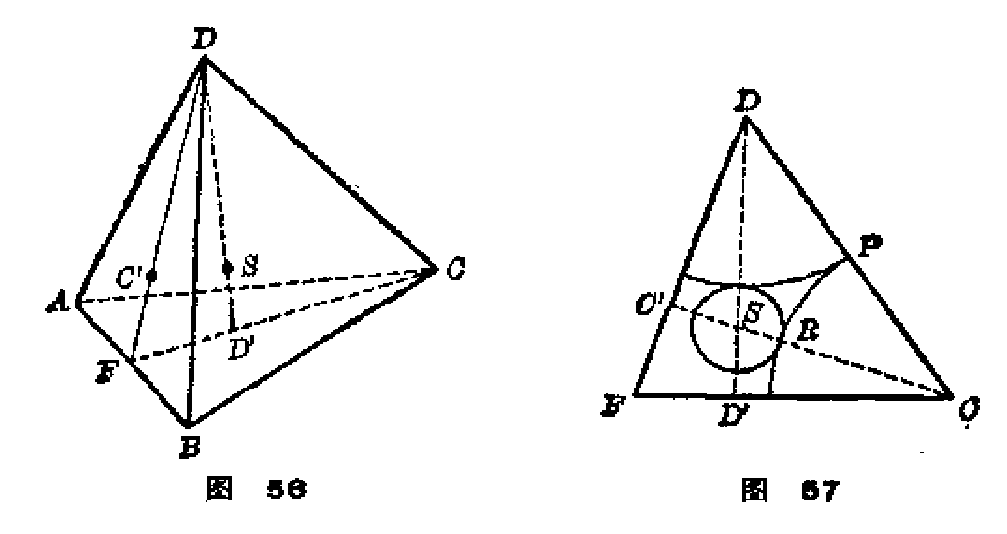


图 56　　图 57

为了计算r_1，考虑通过四面体$ABCD$两条高CC'和DD'的平面与该四面体的截面CDF(图 57)，我们有:

$$CP=DP=CR=1,\qquad CF=DF=\sqrt{3},$$

$$FD'=FC'=\frac{\sqrt{3}}{3},\ CC'=DD'=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$\triangle CSD'$和$\triangle DFD'$相似，据此，

$$\frac{SC}{SD'}=\frac{FD}{FD'}$$

注意到$SD'=DD'-DS=DD'-SC$，得

$$\frac{SC}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-SC}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}},$$

或
$$SC=2\sqrt{6}-3SC,$$

因而
$$SC=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

但 $r_1=CS-CR$, 所以

$$r_1=\frac{\sqrt{6}}{2}-1.$$

最紧密的单位球结构的大空隙，是在六个球之间形成的，例如图 55 上，球心在点 E、F、G、H、K 和 L 的球之间．由于形成大空隙的六个球中任何三个都彼此相切，所以这六个球的球心是正八面体 $EFGHKL$ 的顶点，八面体的棱长为 2（图 58）．能放进这种大空隙的最大半径（设为 r_2）的球，与六个球都相切，它的球心与正八面体 $EFGHKL$ 的对称中心重合，即与正方形 $FGHK$ 的中心重合（图 59）．半径 r_2 可以作为与四个单位圆相切的圆的半径来计算，这四个单位圆的圆心是正方形顶点．

这样一来，

$$KF=FG=GH=HK=2,\ HF=2\sqrt{2},$$

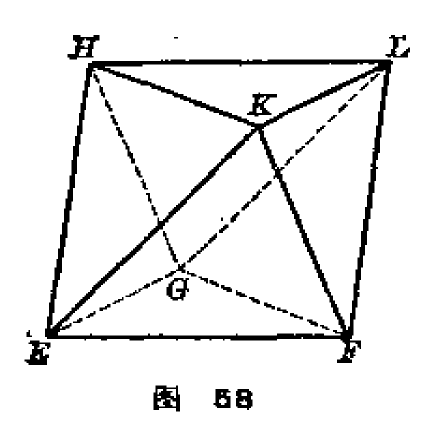


图 58

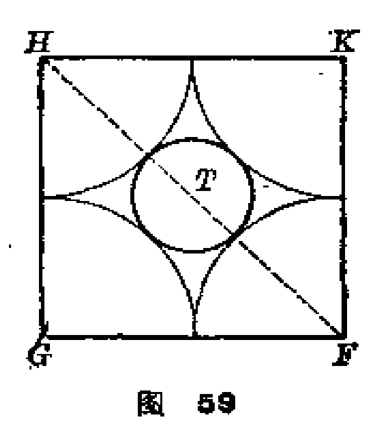


图 59

因此 $$r_2=\sqrt{2}-1.$$

42. 设 n 是通过球 K 的球心、平行于已知正多面体界面的平面数. 每一个这样的平面在球面上截出一个大圆. 显然所有的大圆相交, 并且, 如果多面体是正的, 不可能同时有三个这样的大圆交于一点(事实上, 如果同时有三个大圆通过某个点, 这就是说, 在多面体上, 至少有三个同时垂直于某个平面, 而彼此又不平行的界面. 这对于正多面体来说是不可能的). 这样, 我们所考虑的大圆在 $n(n-1)$ 个点相交, 而这些交点把它们分成 $2n(n-1)$ 条弧, 因为从每个这样的交点有 4 条弧出发, 而每一条弧连接两个交点. 由此可知, 导出多面体有 $w=n(n-1)$ 个顶点, $k=2n(n-1)$ 条棱. 如果 s 是导出多面体的界面数, 那末应用多面体的欧拉公式 $w+s=k+2$ 得

$$n(n-1)+s=2n(n-1)+2,$$

由此 $$s=n^2-n+2.$$

利用这些式子, 我们对五种柏拉图体(即正多面体——译者), 列出它们的导出多面体的顶点、棱、界面的个数表.

正多面体名称	n	导出多面体		
		w	k	s
立 方 体	3	6	12	8
正 四 面 体	4	12	24	14
正 八 面 体	4	12	24	14
正十二面体	6	30	60	32
正二十面体	10	90	180	92

现在, 我们直接转到作导出多面体.

(1) 作立方体的导出多面体是特别简单的. 可以认为球 K 内切于立方体. 那末, 通过球心且平行于立方体界面的平

面，在球面上划出的大圆将交于球和立方体的切点．因而立方体的导出多面体是正八面体．

(2) 我们已经知道，正四面体的导出多面体是有 12 个顶点，24 条棱的 14 面体．过球心且平行于此四面体底面的平面，分别与三个平行于侧面的平面相交，它们的交线都是直径，并且分别平行于四面体的底棱，因而，对应于四面体侧面的大圆，把对应于底面的大圆分成六段相等的弧．由于此四面体是正的，故其它大圆也被六等分．这样，导出 14 面体的棱长都等于球 K 的半径．

平行于原四面体三个侧面的大圆相交于六个点，它们构成两个球面三角形的顶点（图 60）．这些三角形对应于导出十四面体的两个等边三角形的界面．对原四面体的其它界面重复同样的讨论，我们总共得到 8 个全等的等边三角形．由于无论哪一对三角形界面没有公共棱（但每个顶点属于三个等边三角形界面），所以我们的作法用尽了导出多面体的所有的棱．这样，另 6 个界面应该是四边形，又由于这个导出多面体的所有的棱等长，所以这 6 个界面是菱形．

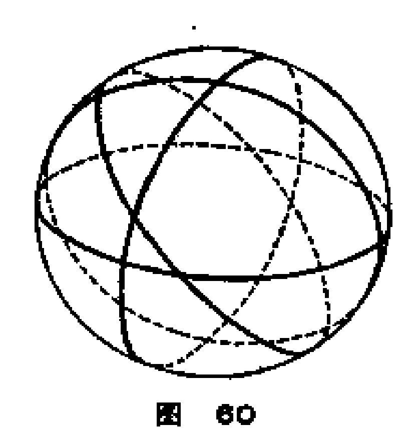


图 60

我们证明，这些菱形实际上是正方形．

例如，考察这个导出十四面体的在平行于原四面体底面的平面上的棱．它们形成一个正六边形，这些边平行于十四面体的主对角线，因而也平行于原四面体的底棱．对导出十四面体的其它的棱也可如此讨论．但正四面体的不相交的棱两两垂直，所以菱形不平行的边也两两垂直，即这些菱形实际

上是正方形.

如此，正四面体的导出多面体，是由正方形和等边三角形构成的半正十四面体(图 61).

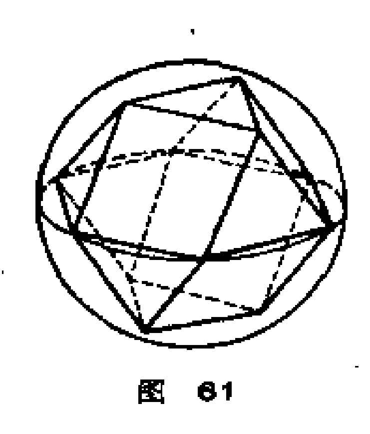


图 61

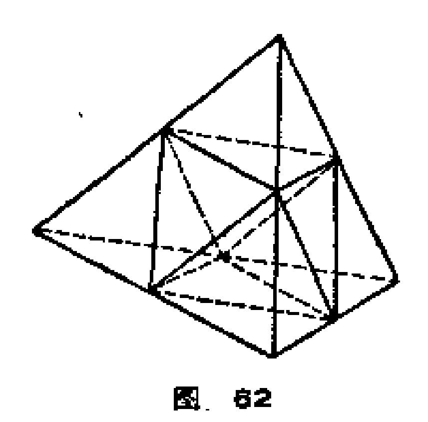


图 62

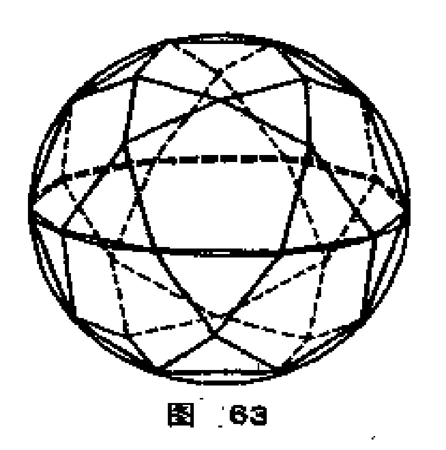
(3) 用正四面体界面上的线段，连接正四面体各棱的中点，我们得到正八面体(图 62). 因为如此作出的正八面体的界面，平行于正四面体的相应的界面，所以正八面体的导出多面体，也就是正四面体的导出多面体.

(4) 正十二面体的导出多面体的作法，可以如正四面体一样地进行.

我们分出正十二面体的两个平行界面称之为底面. 那末过球心且平行于五个侧面的平面，与水平面内的大圆相交，它们的交线都是直径，并且分别平行于正十二面体上、下底面的棱. 这样，对应于底面的大圆被分成十段相等的弧. 同样地，其它大圆也如此. 因而正十二面体的导出多面体各棱的长相等.

平行于侧面的大圆在 20 个点相交. 这些点中，五个组成一个球面正五边形的顶点，又五个组成另一个球面正五边形的顶点. (这些五边形的存在性，可从沿底棱相交的平面的平行性得到，它们的正确性可从弧与弧之间的角都相等得知.)

用弦连接这些五边形的顶点，得到两个正五边形(图 63)，它们在平行于正十二面体底面的平面内.


图 63

对正十二面体的其它各对界面重复以上讨论，我们得知，正十二面体的导出多面体有 12 个界面是正五边形. 由于随便哪两个五边形都不会有公共的棱，所以我们的作法用尽了导出多面体的棱. 这样，它的另 20 个界面应该是正三角形(已经证明过，这些界面由 60 条等长的棱为界). 所得到的多面体称为半正 32 面体.

(5) 现在作正二十面体的导出多面体. 这种情形要比前几种复杂得多，所以我们不从整个正二十面体出发，而只考虑它的一半，也就是，在某个界面(例如图 64 里的 ABC，它可以看作正二十面体的底面)的顶点会聚的十个界面构成的图形.

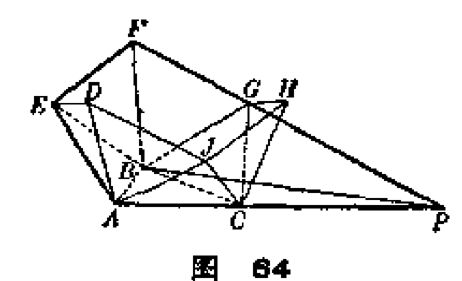


图 64

为了作导出多面体，只要知道平行于这些界面的平面，因为正二十面体的其它十个界面(它们的一个顶点与底面 ABC 连接)是平行于这些界面的.

平行于与底面有公共棱的界面(因而分别平行于直线 AB, BC, CA)的平面，把平行于底面的大圆六等分. 为了求得平行于其它侧面的平面，分这个大圆的分点的位置，必须计算这些侧面与底面的交线和底棱之间的夹角. 例如，我们来计算界面 BFG 与 ABC 的交线和 AC 棱之间的夹角.

因为 $AEFGC$ 是正五边形，所以延长它的边 AC 和 FG

交于点 P，$\angle GPC=36°$. 因此，

$$GP=CP=\frac{\sqrt{5}+1}{2}CG=\frac{\sqrt{5}+1}{2}AB.$$

从 $\triangle ABP$ 可得线段 BP 的长度：

$$\begin{aligned}BP&=\sqrt{AB^2+AP^2-2AB\cdot AP\cos 60°}\\&=\sqrt{AB^2+(AC+CP)^2-AB(AC+CP)}\\&=\sqrt{AB^2+CP^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2}AB\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}+1)AB.\end{aligned}$$

现在已不难计算界面 BFG 和 ABC 的交线与 AC 之间的夹角 BPA. 事实上，

$$\frac{\sin\angle APB}{AB}=\frac{\sin\angle BAC}{BP},$$

因此

$$\sin\angle APB=\frac{AB}{BP}\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}.$$

$$\angle APB=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}=\arcsin 0.3784\approx 22°14'.$$

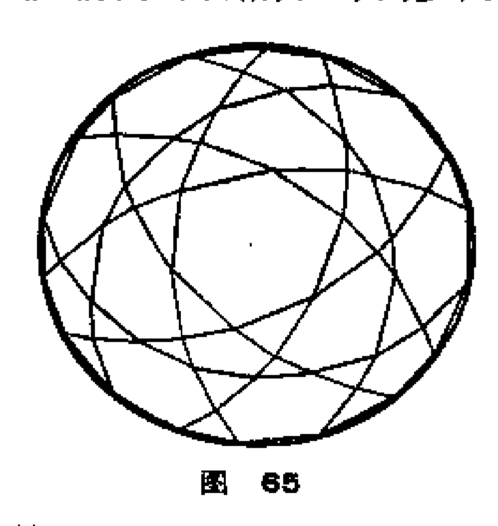
如此，平行于正二十面体侧面的九个大圆，把平行于底面的大圆分成不等的 18 份，12 份为 $22°14'$，六份为

$$60°-2\cdot 22°14'=15°32'.$$

其它大圆也如此. 这样，正二十面体的导出多面体的棱不全相等，它们分成两组、较长的棱比较短的棱要多一倍. 所以，正二十面体的导出多面体有 120 条长棱，60 条短棱.

现在考虑，例如，在顶点 A 相交的界面. 平行于这些界面（因而平行于棱 JC, CB, BE, ED 和 DJ）的平面，在球 K

上截出两个正球面五边形．这样的五边形一共有十二个(每一条棱连接两个顶点)．形成两个这样的五边形的五个圆产生十个三角形，每个球面五边形连着五个三角形(图 65)．这些三角形与五边形有一条公共边．一共有六十个这样的三角形．如此，正二十面体的导出多面体的所有的棱都作出来了(见前面的表格)．导出多面体由 120 条棱为界的其余界面是六边形，它们的各边都相等．以弦代替大圆的弧，我们得到了导出多面体．


图 65

现在更详细地考察一下这些六边形．上面已经提到，它们的边相等．它们由球面上对应于通过棱 DJ、JH、HG、GF、FE 和 ED 的界面的大圆的弧形成．界面之间的角不等，并且取决于邻接的界面是否只有一个公共顶点．因此，这些等边六边形的角也不等．如果把它的内角编号，那末偶数号的角相等，奇数号的角也相等．因为它各边相等，所以不可能是平面六边形，否则，它应是正六边形(它的各个顶点在球面上，如是平面图形的话，这些顶点将在一个圆上)．

这样，正二十面体的导出多面体不是普通意义下的多面体．

43．我们只举一个与这个假设矛盾的例子．

作下述四面体的展开图：其底面是等边三角形，侧面是顶角为 30° 的等腰三角形，顶点是 S(图 66)．设 P 是一条底棱的中点．从展开图上任一点 x 到 P 点的距离总小于线段 SP 的长度，因为展开图上的所有点都在以点 P 为圆心、PS 为

半径的圆内，只有 S 点在圆上．由此可知，在这个四面体的界面上，任何一条连接点 P 和 S 的弧要比线段 PS 长．因而，这个四面体违反本题所说的假设，证毕．

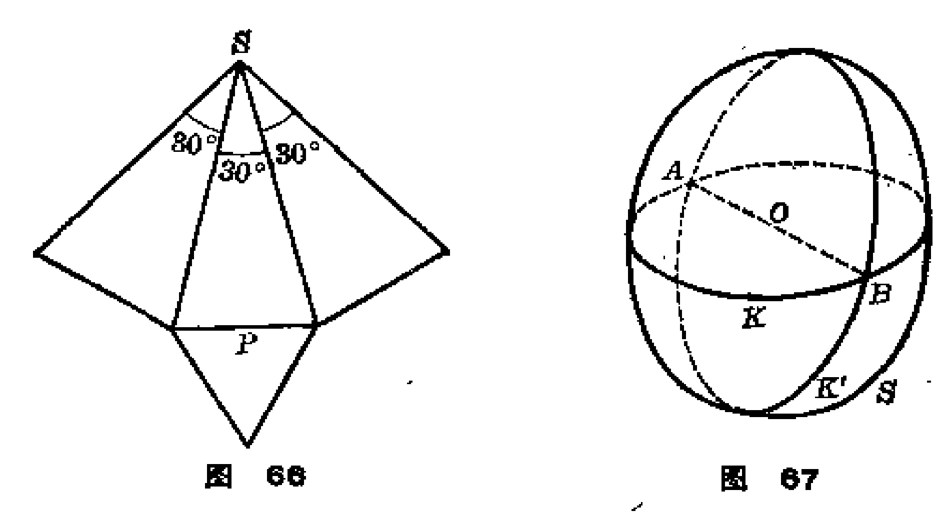


图 66　　　　图 67

44．设 S（图 67）是满足题设的闭曲面．取一个截口，使之不小于其它任何的截口．设这样的截口为圆 K．过 K 的圆心 O 作曲面 S 的一个截口 K'．K 和 K' 所在的平面相交于圆 K 的直径 AB，这说明 AB 是圆 K' 的弦．因而，圆 K' 不会小于圆 K．另一方面，K' 又不能大于 K，因此它们相等且有公共圆心．

K' 的选择是完全任意的，只有唯一的一个条件，即它所在的平面应通过 K 的圆心 O．因此用通过 O 点的任何平面截 S 得到的截口，都有刚才证明的 K' 所具有的性质，所以曲面 S 是球面．

45．引进空间直角坐标系 $O\text{-}XYZ$（图 68）．在 X 轴上任取一点 P（异于 O），在 XY 平面上，过点 P 作垂直于 X 轴的直线 t．然后在 XZ 平面上作以 P 点为圆心，PQ 为半径的圆弧 AQB．过直线 t 和 A 点作平面 π．现在，我们绕直线 t 转动 π 到通过 B 点为止．在平面 π 上每一位置，以线段

MN 的中点 S 为圆心作通过点 M、N 的圆（点 M 在弧 AQB 上，N 在 Z 轴上），我们得到一个凸闭曲面（“双牛角形”），它不是球面，但满足本题的全部条件．实际上，通过直线 t 的任何一个平面如果与它相交，交线都是圆．

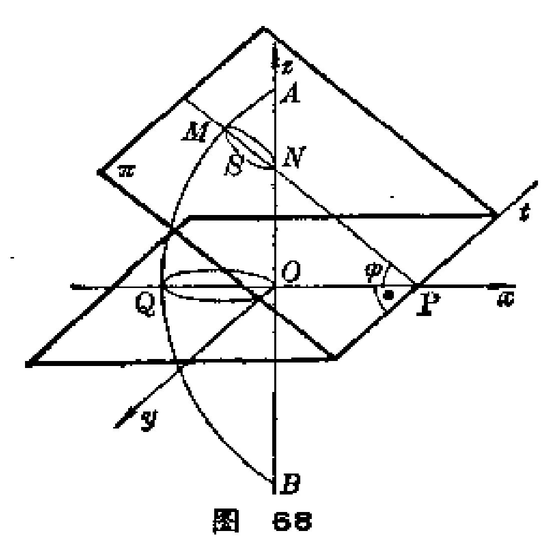


图 68

46．由于质点 M 的速度分量 u、v、w 算术无关，所以 u、v、w 不能同时为 0．其次，不失一般性，可设 $u\neq0$．

点 M 在 x 轴上的投影以速度 $|u|$ 向前和向后运动．设 τ 是点 M 返回初始位置 $M(0)$ 所需的时间，那末它在立方体平行于 x 轴的棱上的投影 M_x，也经过时间 τ 返回初始位置．投影 M_x 在时间 τ 内通过的全部路程等于 $|u|\tau$．如果 d 是立方体的棱长，那末 M_x 从 M 开始运动到返回初始位置所通过的路程，由 k（偶数）条线段 d 组成．这样，$|u|\tau=kd$．

类似地，由质点 M 通过时间 $\tau>0$ 返回初始位置 $M(0)$，即由

$$M(\tau)=M(0)$$

的假设可知，y 和 z 轴方向的速度分量满足

$$|v|\tau=ld,\quad |w|\tau=md.$$

不过，偶数 l 和 m 可以是 0，同时，偶数 k 显然不等于 0，因为 $\tau>0$，$u\neq0$．因而

$$l|u|\tau-k|v|\tau=lkd-kld=0.$$

约去 τ 得

$$l|u|-k|v|=0$$

或
$$l|u|-k|v|+0\cdot w=0.$$

质点 M 在时刻 τ 时的速度方向(从而它的各分量的符号),由它的初始速度的方向唯一地确定. 在上式中以 u 或 $-u$ 代 $|u|$, v 或 $-v$ 代 $|v|$, 我们得到整系数 p、q、r 的关系式

$$pu+qv+rw=0.$$

由于 $|q|\neq0$, 这与质点 M 的速度分量 u、v、w 的算术无关性矛盾. 因而,假设质点 M 经时间 τ 返回初始位置是不正确的.

47. 第二个条件(不相邻界面上的数有不等于 1 的公约数)允许不同的解释. 可以有三种不同方式理解它:

1. 放在不相邻界面上的每一对数有公约数(不等于 1, 为简单起见,下面不再提到这个限制).

2. 放在不包括相邻界面的任何一组界面上的数有公约数.

3. 任取一个界面. 考虑由它及与它不相邻的所有界面构成的一组界面. 放在此组内各界面上的数有公约数.

随着解释的不同,本题允许有不同的解.

设我们按第一种方法理解第二个条件. 此时,本题不仅对正多面体有解,而且对所有多面体都有解.

事实上,任取一个多面体,把它的界面用顺序的自然数编号,并且考虑所有可能的界面偶,每一个界面偶由两个相邻的或不相邻的界面构成. 把由不相邻界面组成的偶编号,并且在组成第 k 个偶的两个界面上写第 k 个素数 p_k. 最后,把写在同一个界面上的数抹去,而以它们的积代替.

也许,在某些界面上按上述方法填写它们的数时是空的.

在每个空的界面上，我们随便写一个还没有用过的素数.

显然，不管所考察的多面体是不是正的，应用这种方法，本题的两个条件都是满足的.

若本题的第二个条件按第二种方法理解，则解法与上述类似. 把不相邻界面形成的各个组编号，在第 k 组的每个界面上写上第 k 个素数. 以后的做法与上述完全一样.

最后，如果按第三种方法理解第二个条件，那末本题只对立方体和四面体有解. 在正的立体中，它们与众不同：与任选的一个界面不相邻的界面里，不会有彼此相邻的界面偶. 在立方体里，每一个被选到的界面只有一个与它不相邻的界面；在正四面体里，任何两个界面都相邻. 在其它正立体的界面上放置自然数，不违反按第三种方法理解的第二个条件是不可能的.

48. 三个已知球中随便哪两个都不能相切. 否则，通过切点 P 的平面将与两个球相切，而且与第三个球相交于某个圆，这个圆过 P 点的切线将与这三个球都相切，与题设矛盾.

因而，两个圆应该沿 P 所在的圆相交. 这个圆与第三个球也相交，如果不相交的话，此圆过 P 点的切线与这三个球都相切. 由于这个圆与第三个球相交于 P 点，所以它们应该还有一个交点，这个交点也属于这三个球.

49. 先证明引理：圆内接三角形中，正三角形的面积最大.

设圆内接三角形中，有最大面积的三角形 ABC 不等边（图 69）. 例如设 $AB\neq AC$. 作 $\triangle A'BC$，它的顶点 A' 与垂直于线段 BC 的直径的端点重合，这个端点与 A 点在直线 BC 的同一侧. $\triangle A'BC$ 的面积大于 $\triangle ABC$ 的面积，因为，它们

有相同的底边 BC，而 $\triangle A'BC$ 的高大于 $\triangle ABC$ 的高．事实上，$A'F=A'O+OF$，$AE=AD+DE$，但 $OF=DE$，$A'O>AD$．这个矛盾证明了圆内接三角形中，正三角形面积最大．引理得证．

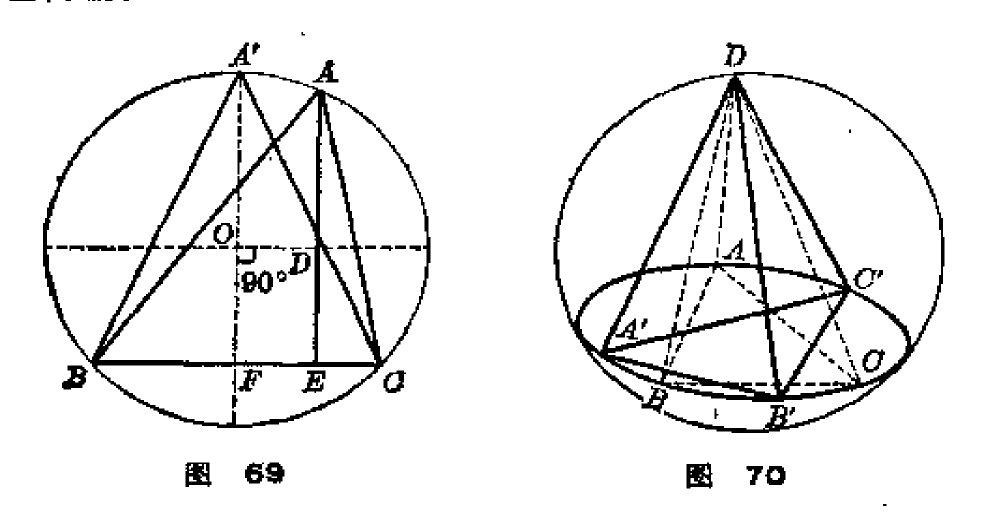


图 69　　　　图 70

现在证明本题的结论．设有四面体 $ABCD$，它不是正的，但却是球内接四面体中体积最大的一个(图 70)．在四面体 $ABCD$ 的界面中，至少能找到一个面不是正三角形．例如，设 $\triangle ABC$ 不等边．作四面体 $A'B'C'D$，它的底面是正三角形，与 $\triangle ABC$ 同内接于一个圆．根据引理，$\triangle A'B'C'$ 的面积大于 $\triangle ABC$ 的面积，但四面体 $ABCD$ 与 $A'B'C'D$ 等高，所以，与假设相反，四面体 $A'B'C'D$ 的体积比四面体 $ABCD$ 的体积大．这样，在球内接四面体中，正四面体的体积最大．证毕．

50．满足本题条件的四条直线画在图 71 上，其中三条包含立方体的棱 DC，BB'，$A'D'$，而第四条——直线 KL——通过立方体相对的棱 AA' 和 CC' 的中点．这四条直线既不相交也不平行(用解析几何不难证明这些事实，但我们不加证明地应用它们)．我们证明，无论什么样的第五条直线不会与

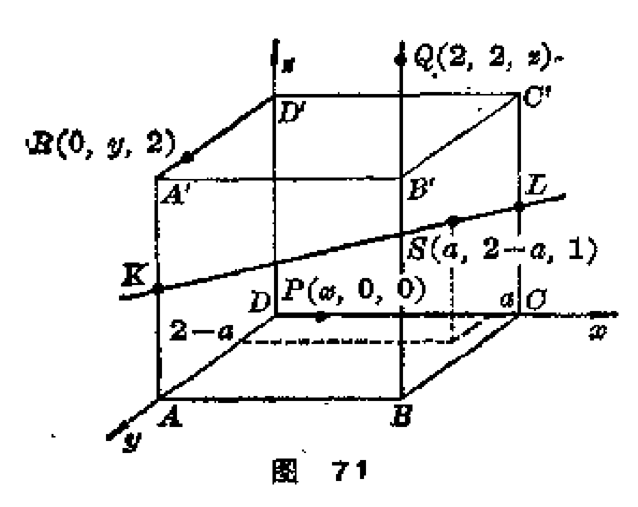


图 71

这四条直线全相交.

如图 71，引进直角坐标系．采用立方体棱长的一半作长度单位(三根轴都一样)．设存在第五条直线与上面所说的四条直线在点 P、Q、R、S 处相交，其中，P 点在直线 DC 上，Q 在 BB' 上，R 在 $A'D'$ 上，S 在 KL 上．交点的坐标是：$P(x, 0, 0)$，$Q(2, 2, z)$，$R(0, y, 2)$，$S(a, 2-a, 1)$．由于 P、Q、R、S 在一直线上，向量 $\overrightarrow{PQ}[2-x, 2, z]$，$\overrightarrow{PR}[-x, y, 2]$，$\overrightarrow{PS}[a-x, 2-a, 1]$ 共线，因此，

$$\frac{2-x}{-x}=\frac{2}{y}=\frac{z}{2}, \tag{1}$$

$$\frac{a-x}{-x}=\frac{2-a}{y}=\frac{1}{2}. \tag{2}$$

由(2)可得，

$$y=4-2a, \tag{3}$$

$$x=2a. \tag{4}$$

把(3)、(4)代入(1)，得

$$\frac{2-2a}{-2a}=\frac{2}{4-2a}$$

或二次方程

$$a^2-2a+2=0.$$

它的判别式小于 0，所以方程组(1)、(2)没有实数解，从而点 P、Q、R、S 不可能在一直线上.

51．考虑立方体 $ABCDA'B'C'D'$ (图 72)，从顶点 A 作

线段 AB'、AC'、AD'、AC 得到三个棱锥：$AA'B'C'D'$、$ABB'C'C$ 和 $ADD'C'C$（其中第一个单独地画在图 73 中）．这些棱锥两两相等．事实上，例如我们取 $AA'B'C'D'$ 和 $ABB'C'C$，它们的高 AA' 和 BB' 以及底面 $A'B'C'D'$ 和 $BB'C'C$ 都相等．把棱锥 $AA'B'C'D'$ 和 $ABB'C'C$ 拼起来，使前者的顶点 A'、B'、C'、D' 分别与后者的顶点 B、C、C'、B' 重合，那末棱 AA' 和 AB 重合．不难看出，类似的结论对其它各对侧棱也成立．

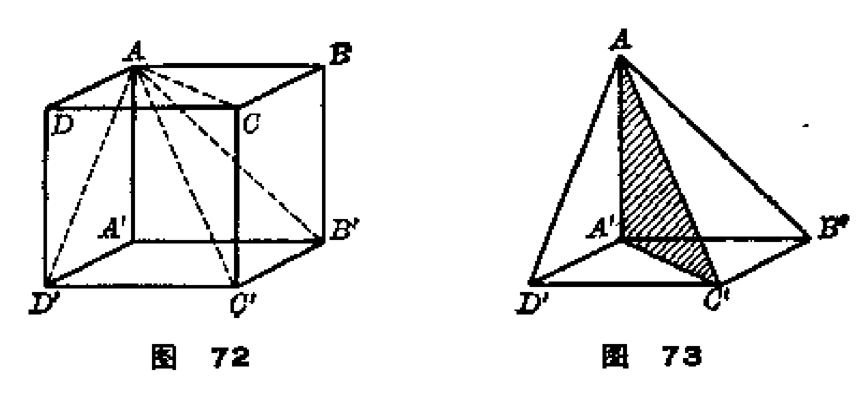


图 72　　　　图 73

平面 $AA'C$ 把棱锥 $AA'B'C'D'$ 分成两个三棱锥，它们关于平面 $AA'C$ 镜面对称．作另两个四棱锥的对称平面 ABC' 和 ADC'，不难验证，我们得到了本题要求的、把立方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 分成六个四面体的方法，其中三个全等，而另三个经镜面反射后转变为前三个．

52．考虑立方体的铁丝模型 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$．从顶点 A 作线段 AB', AC', AD', AC（图 74），我们得到棱锥 $AA'B'C'D'$, $ABB'C'C$ 和 $ADD'C'C$ 的三个铁丝模型．第一个模型可以填满为棱锥，只要连接棱 AA' 的每个点与棱 $B'C'$ 的每个点及与棱 $C'D'$ 的每个点．对另两个模型也可用类似的方法．对第二个模型，把 AB 与 $B'C'$ 的点及 AB 与 CC' 的点连接起来；对第三个模型，把 AD 与 $C'D'$ 及 AD 与 CC' 的所有的点连接起来．上述方法把立方体的"骨架"填满为符合本题条件

的"肉体"模型，因为，填满棱锥模型时，我们已经作了只连接属于立方体棱的点的线段.

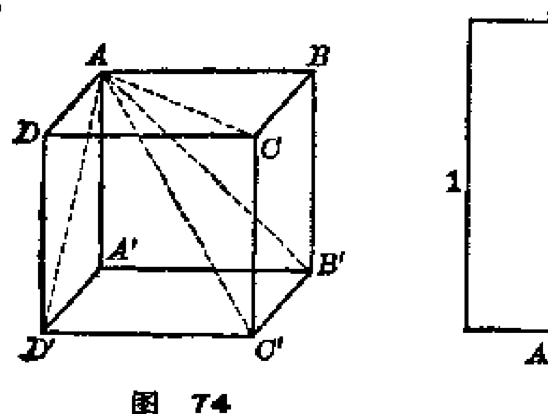


图 74

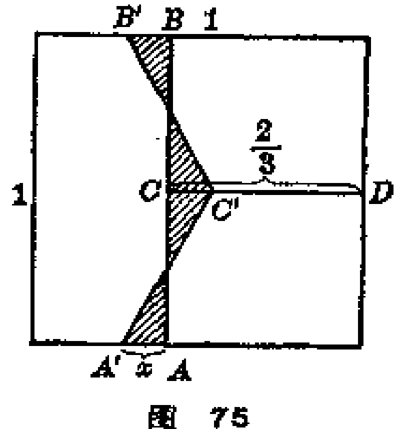


图 75

53. 用线段 AB 和 CD 把正方形田块分成三个矩形，如图 75 所示. 我们得到，分界线的总长度是 5/3.

现在，用折线 $A'C'B'$ 和线段 $C'D$ 划分方形田块，使 $AA'=CC'=BB'=x$. 显然，此时三部分的面积不变.

我们考虑 x 取什么值时，分界线的总长度小于 5/3.

为了回答这个问题，需要解不等式(图 75)

$$2\sqrt{(2x)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{2}{3}-x<\frac{5}{3}.$$

变形后得

$$4\left(4x^2+\frac{1}{4}\right)<(x+1)^2=x^2+2x+1,$$

$$15x^2-2x<0,$$

因此

$$0<x<\frac{2}{15}.$$

我们把上面考虑的这类分界线的总长度记为 $L(x)$，则

$$L(x)=\sqrt{16x^2+1}+\frac{2}{3}-x.$$

函数 $L(x)$ 当

$$x=\frac{\sqrt{15}}{60}$$

时达到极小值

$$L_{\min}=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{15}}{4}\approx 1.635<\frac{5}{3}.$$

54. 设 O 是彼此形成等角的四条射线的始点(图 76). 在这些射线上截取线段 $OA=OB=OC=OD$, 作正四面体 $ABCD$. O 点是这个四面体的外接球心. 延长线段 OD 与平面 ABC 相交, 记交点为 D_1. 点 D_1 是等边三角形 ABC 的中心, 而线段 DD_1 是四面体 $ABCD$ 的高. 根据正四面体的性质, $D_1O=\frac{1}{3}OD$. 因而

$$\cos\angle D_1OB=\frac{D_1O}{OB}=\frac{D_1O}{OD}=\frac{1}{3},\ \cos\angle BOD=-\frac{1}{3},$$

$$\angle BOD=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

如果在三维空间内有从一点出发的、彼此间夹角相等的五条射线, 那末, 只要重复上述作法, 将得到一个有五个顶点

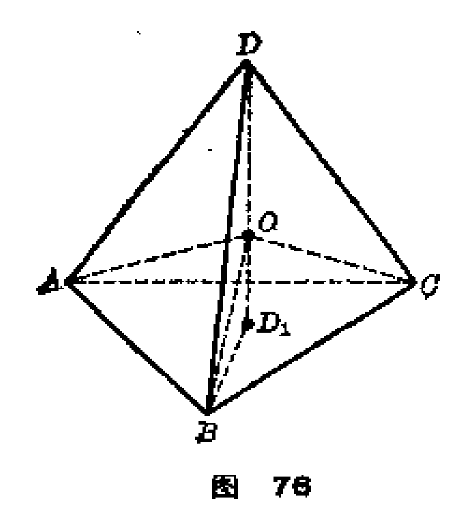


图 76

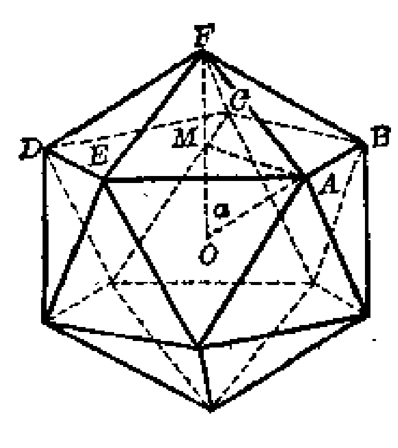


图 77

的正多面体．但这样的多面体不存在．

55．由于 $ABCDE$ 是正五边形(图 77)，所以

$$AM=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}AB,$$

其中 M 是五边形 $ABCDE$ 的中心．

从 $\triangle AFM$(由于 $\angle AMF=90°$) 可以计算 $\angle AFM$:

$$\sin\angle AFM=\frac{AM}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}. \qquad (AB=AF)$$

现在已经不难计算正二十面体外接球半径 OA 和 OF 的夹角($\angle AOF=\alpha$)．事实上，$\angle AFO=90°-\alpha/2$，故

$$\sin\angle AFM=\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}=\arccos 0.4472=63°26'.$$

56．所求的比值 k，等于四面体截球面所得的立体角与球的其余部分之比．

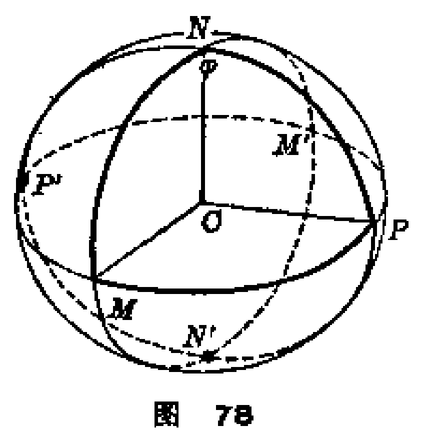


图 78

我们计算正四面体的三面角．为简单起见，考虑顶点与 O 点重合的三面角．设 r 是球半径．过三面角的每两条棱作一个平面，得到等边的球面三角形 MNP(图 78)．这个球面三角形的角 φ 等于四面体的二面角，因而 $\varphi=\arccos\frac{1}{3}\approx 1.23$.

延长球面三角形 MNP 的边构成六个球面二角形，其中三个公有球面三角形 MNP，而另三个公有球面三角形 $M'N'P'$．这六个球面二角形的面积是 $2\varphi r^2=2r^2\arccos\frac{1}{3}$．有公共三

角形(随便 MNP 还是 $M'N'P'$)的三个二角形占有半个球面. 因而,若记 x 为三角形 MNP 的面积,则

$$3\cdot 2\varphi r^2-2x=2\pi r^2,$$

由此,

$$x=(3\varphi-\pi)r^2=\left(3\arccos\frac{1}{3}-\pi\right)r^2\approx 0.55\pi r^2.$$

所求的比值为

$$k=\frac{4\pi-\left(3\arccos\frac{1}{3}-\pi\right)}{3\arccos\frac{1}{3}-\pi}=\frac{5\pi-3\arccos\frac{1}{3}}{3\arccos\frac{1}{3}-\pi}\approx 21.8.$$

57. 第一次称量比较五个物体中的二个. 设较轻的一个为 A, 较重的一个为 B, 那末第一次称量的结果可写成

$$A<B$$

(读成"A 比 B 轻"). 然后比较另两个,把较轻的记为 D, 较重的记为 E:

$$D<E.$$

第五个物体记为 C.

第三次称量比较 B 和 E. 可以发生两种情况, 对这两种情况进行的讨论是类似的, 因此我们只考虑 $B<E$ 的情形. 结果,进行三次称量后知道

$$A<B<E,\ D<E.$$

第四次称量比较 C 与 B. 必需区别两种情形: (1) $B<C$, (2) $C<B$.

(1) 当 $B<C$ 时有

$$A<B<E,\ D<E,\ B<C.$$

为比较 C 和 E, 需要第五次称量. 也有两种可能: $E<C$ 或 $C<E$.

若 $A<B<E<C$，则比较 A 与 D，B 与 D 之后，可以确定比 E 轻的物体 D 的位置．这样，为确定五个物体按重量排列的次序，需要进行七次称量．

若 $A<B<C<E$，为确定 D 的位置也只要两次称量．先比较 D 和 B，然后，根据它的结果比较 D 和 A 或 D 和 C．结果，仍进行七次称量．

(2) 当 $C<B$ 时有

$$A<B<E,\ C<B,\ D<E.$$

比较物体 A 和 C（第五次称量）．在可能有的两种情形（$A<C<B$ 或 $C<A<B<E$）里，为确定 D 的位置（我们已经知道它比 E 轻），只要两次称量就够了．因而，$C<B$ 时，为按重量增加次序排列物体，需七次称量．

至此，我们已穷尽了所有可能的情形，所以证明至此结束．

可以证明下列更一般的结论：为使 n 个物体 $(n\geqslant2)$ 按重量减少的次序排列，只需要进行 $d_n=1+nk-2^k$ 次称量，这里 k 是满足不等式 $2^{k-1}<n\leqslant2^k$ 的自然数．

58．解法一：设 a、b、c 分别是甲、乙、丙每天所吸的烟占公有的那包烟丝的份数，那末

$$a+b=\frac{1}{30},\quad a+c=\frac{1}{15},\quad b+c=\frac{1}{12}.$$

把这三个方程的两边分别相加，得 $a+b+c=11/120$．把这个等式依次减去前三个，得 $a=1/120$，$b=3/120$，$c=7/120$．这样，三个人一起抽，烟丝在 $1:(1/120+3/120+7/120)=120/11$ 天用完．为计算每人应付的钱，只要把 120 兹罗提按 $1:3:7$ 分成三份．

解法二：这个问题可以更简单地解决．设甲、乙、丙每天

抽值 x、y、z 兹罗提的烟丝.

不难看出:

$$x+y=4,\ x+z=8,\ y+z=10.$$

解之得 $$x=1,\ y=3,\ z=7.$$

这样,三个人抽烟,在 120:(1+3+7)=120:11 天内用完烟丝,他们应按 1:3:7 分担用费.

59. 设枕木沿地板及铁轨沿枕木无滑动地滚动, 那末问题的条件可以如图 79 所示.

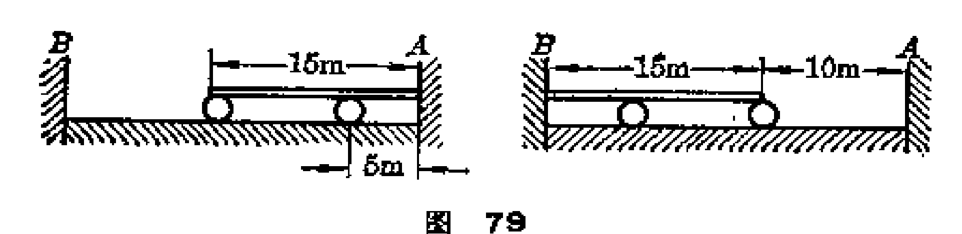


图 79

若在滚动中枕木的轴向不变, 则枕木转一转时铁轨从 A 壁向 B 壁移动的距离,等于枕木横截面的周长. 但是,枕木本身也向 B 壁滚动,每转动一周通过的距离等于横截面的周长. 这样一来,当铁轨通过 2×5 m 时,它的端点受到 B 壁的阻碍. 由于铁轨的长度是 15 m, 所以工厂车间的宽度等于 25 m.

60. 设有 n 个人参加游戏. 把各个参加者提出的估计值记为 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n$. 设 $a=\max(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-2})$.

我们假定,号码为 1, 2, …, $n-2$ 的参加者是诚实的, 他们是尽可能正确地回答所提的问题,而第 $n-1$ 和 n 号两个人是串通的. 大大地抬高估值 a_{n-1}, 使

$$a_{n-1}>a.$$

为了使串通者获胜,只要让另一个人写出估值

$$a_n\geqslant(n-1)a_{n-1}.$$

事实上，在这样的估计下，全部估值的算术平均 S 满足不等式

$$S=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{n}>\frac{a_{n-1}+(n-1)a_{n-1}}{n}=a_{n-1}.$$

由于 $a_{n-1}>a$，所以

$$a<a_{n-1}<S,$$

由此，经过不复杂的变形得

$$0<S-a_{n-1}<S-a.$$

这个不等式意味着，如果提出估值 a_n 的人不胜，那末提出 a_{n-1} 的人获胜.

为了减少有如此串通的危险，弗劳兹拉夫游戏的规则可改动如下：从估值 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 中去掉两个最大的，然后计算其余 $n-2$ 个估值的算术平均值，把它与这 n 个值比较，查明其中哪一个最精确.

61．设地球仪上的地区及其图象在与 x 轴（通过水盆和地球仪切点的公共轴）于 a、b（垂直）相交的平面上的纬线之间（图 80）．若区间 Δx 充分小，则图形 $DEGF$ 和 $D'E'G'F'$

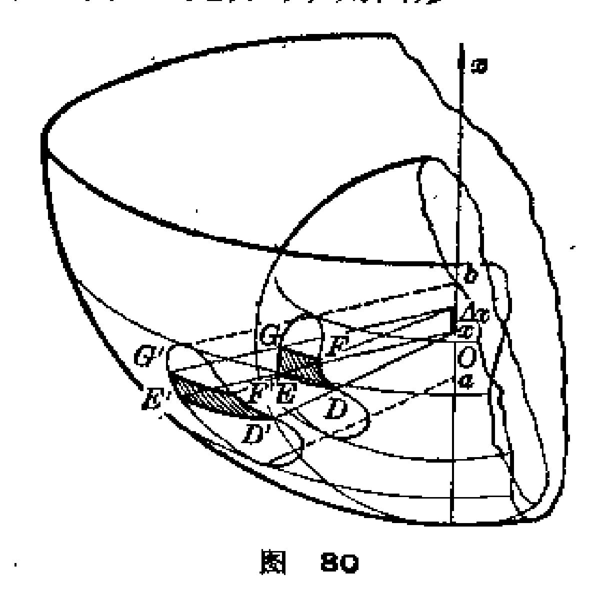


图 80

可以看作由经线所界的球面区域的元素(图 81). 于是，图形 $DEGF$ 和 $D'E'G'F'$ 的面积可以表示为

$$S_{DEGF}=\frac{2\pi r\varphi(x)\Delta x}{2\pi}=r\varphi(x)\Delta x,$$

$$S_{D'E'G'F'}=\frac{2\pi R\varphi(x)\Delta x}{2\pi}=R\varphi(x)\Delta x,$$

其中 r 和 R 分别是地球仪和盆的半径，

$$\varphi(x)=\angle DxE=\angle D'xE'$$

是 x 的函数，它定义在 x 轴的区间 $[a, b]$ 上.

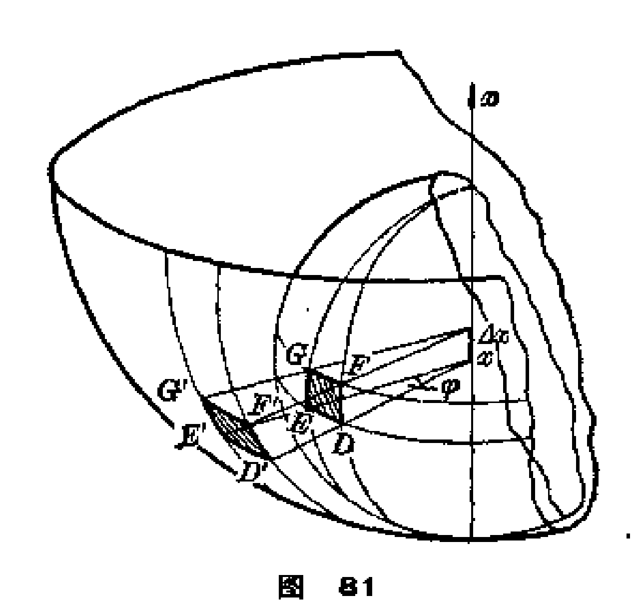


图 81

对表达式 $R\varphi(x)\Delta x$(曲面元素的面积)关于 x 从 a 到 b 积分后，我们得到映射到盆上的区域的面积 P'，而地球仪上地区的面积，可由对 $r\varphi(x)\Delta x$ 关于 x 在同一区间上积分得到：

$$P'=\int_a^b R\varphi(x)dx=R\int_a^b \varphi(x)dx,$$

$$P=\int_a^b r\varphi(x)dx=r\int_a^b \varphi(x)dx.$$

由于两者积分号下是同一个函数，所以两个积分相等，

$$P'/P=R/r.$$

对于地球仪上的任何地区和它在水盆上的投影，我们得到同样的面积比.

62. 显然，顶点处分布着网袋结点的立方体，可以作为所求的最大球的内接立方体来考虑. 用通过立方体两条相交的主对角线的平面，把这个球切开(图82)，结果得到球的截面——大圆，以及立方体的截面——边长为 a 和 $a\sqrt{2}$ 的矩形. 由于连接球面上两点的最短线是大圆弧，所以连接点 A、B 的细线应当与上面所作截面上的大圆弧 AB 重合. 我们来计算大圆的半径.

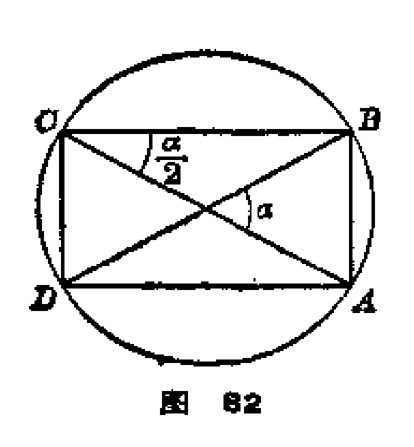


图 82

设 α 是对角线 AC 和 BD 之间的夹角，则

$$\operatorname{tg}(\alpha/2)=1/\sqrt{2},$$

$$\alpha=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}(1/\sqrt{2}).$$

由于弧 AB 长 10 cm，所以从关系式 $\alpha=\widehat{AB}/r$ (r 是球的半径)得

$$r=\frac{10}{2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

由此，

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{10}{2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^3=\frac{500\pi}{3\left(\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}$$

$$\approx 2245(\mathrm{cm}^3).$$

63. 接到命令时，军舰的位置如图 83 所示.

我们暂时不管军舰 B，考虑要在最短时间内集中到一处，应该如何移动 A 舰和 C 舰．显然，这两艘军舰应该彼此沿直线 AC 行驶．它们在 D 点相遇，并且

$$AD:CD=v_a:v_c.$$

我们要证明，在 A 舰和 C 舰到达 D 点之前，B 舰也来到 D 点．当然，这也就证明了它们的会合地点应该是 D.

图 83

我们有

$$AD:CD=v_a:v_c,\quad AD+CD=AC.$$

解关于 AD 和 CD 的这两个方程，得

$$AD=\frac{v_a}{v_a+v_c}AC,\quad CD=\frac{v_c}{v_a+v_c}AC.$$

因而，接到命令后通过时间

$$t=\frac{AD}{v_a}=\frac{AC}{v_a+v_c}$$

A 和 C 相遇．

在这期间，B 舰能行驶的距离为

$$\frac{AC}{v_a+v_c}v_b.$$

为了解决这个问题，只要证明

$$BD<\frac{AC}{v_a+v_c}v_b. \tag{1}$$

由 $\triangle ABC$，用余弦定理得

$$\cos\alpha=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}.$$

由 $\triangle ABD$ 得

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\alpha$$

$$=AB^2+\frac{v_a^2}{(v_a+v_c)^2}AC^2-2AB\frac{v_a}{v_a+v_c}AC\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$$

$$=AB^2\left(1-\frac{v_a}{v_a+v_c}\right)+AC^2\frac{v_a}{v_a+v_c}\left(\frac{v_a}{v_a+v_c}-1\right)+\frac{v_a}{v_a+v_c}BC^2$$

$$=\frac{v_c}{v_a+v_c}AB^2+\frac{v_a}{v_a+v_c}BC^2-\frac{v_av_c}{(v_a+v_c)^2}AC^2.$$

我们必须证明，不等式(1)成立，即

$$\frac{v_c}{v_a+v_c}AB^2+\frac{v_a}{v_a+v_c}BC^2-\frac{v_av_c}{(v_a+v_c)^2}AC^2<\frac{v_b^2}{(v_a+v_c)^2}AC^2$$

成立. 上式两边除以 $\frac{v_b^2}{(v_a+v_c)^2}AC^2$ 得

$$\frac{v_c(v_a+v_c)}{v_b^2}\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\frac{v_a(v_a+v_c)}{v_b^2}\left(\frac{BC}{AC}\right)^2-\frac{v_av_c}{v_b^2}<1. \quad (2)$$

把本题的已知数据代入上式左边，此式确实是成立的:

$$\frac{12(15+12)}{20^2}\left(\frac{100}{200}\right)^2+\frac{15(15+12)}{20^2}\left(\frac{220}{200}\right)^2-\frac{15\cdot12}{20^2}$$

$$=\frac{12\cdot27}{20^2\cdot4}+\frac{18\cdot27\cdot11^2}{20^2\cdot10^2}-\frac{15\cdot12}{20^2}$$

$$=\frac{81\cdot20+81\cdot11^2-15\cdot12\cdot20}{20^3}$$

$$=\frac{1620+9801-3600}{20^3}=\frac{7821}{8000}<1.$$

64. 伪钱币的问题属于可以用信息论方法解决的问题. 在这里我们只想指出，2是(本题条件下得到的)确定假钱的最少称量次数. 事实上，最少称量次数 k 与钱币总数 N 由公式

$$k=\left[\frac{\log(2N+1)}{\log 3}\right]$$

联系，其中$[x]$表示数x的整数部分，即不超过x的最大整数①．在这个问题里$N=4$，因而$k=2$．

我们转到本题．以A、B、C、D表示钱币，它们的重量分别是a、b、c、d．第一次称时，在天平的一个盘上放A和B，在另一个盘上放C和5克重的砝码．这时有两种情形．

1．平衡．因而$a+b=c+5$．假的应是D．在第二次称时，把D放在天平的一个盘上，而砝码或另三个钱中随便取哪个放在另一个盘上．我们可以确定，假钱比真的重还是轻．

2．不平衡．因而$a+b\neq c+5$，并且D的份量是足的，而假的是A、B、C中的一个．在第二次称时，我们在天平的一端放上A，另一端放B．如果重量相等，那末假的是C，并且在$a+b>c+5$时，假的比真的轻，而$a+b<c+5$时，假的比真的重．如果重量不等$(a\neq b)$，则说明假的是A或B．若$a+b<c+5$，且$a<b$，则A是假的（比真的轻）．若$a+b<c+5$，而$a>b$，则B是假的（也比真的轻）．若$a+b>c+5$，$a>b$，则A是假的（比真的重）．最后，若$a+b>c+5$，$a<b$，则B是假的（也比真的重）．

65②．设G是联系四个城市的任意道路网．G可以作为网络来研究，此网络的顶点对应于城市和叉路口，它的弧对应于顶点之间的各段道路．

设G有$i+2$个叉路口，n和m表示G的顶点数和弧数，则

$$n=6+i.$$

---

① 参见A. M. 雅格洛姆，И. M. 雅格洛姆《概率与信息》(吴茂森译，上海科技出版社)第106页，问题25．——译者

② 参见姜伯驹著《一笔画和邮递路线问题》，人民教育出版社，1964年版．——译者

由于从每个城市至少有一条弧出发，而从每个交叉口至少有3条弧出发，所以下面的不等式成立

$$m \geqslant \frac{1}{2}[4+3(i+2)]=5+\frac{3}{2}i.$$

G 是连通的．我们引进新记号

$$\nu(G)=m-n+1.$$

从上面所说的不等式及 $n=6+i$ 可得，$\nu(G) \geqslant i/2$．这就是，若 G 的分支点(交叉口)多于2个，那末 G 包含闭圈．但包含闭圈的网络不满足费用最经济的要求，因为，去掉圈的一条弧(取消闭圈)后，我们得到经济得多的、连接同样四个城市的道路网．

66． 各台机器上能达到最大生产率的是：第I台是 C，第II台是 E，第V台是 D．

女裁缝 C 也可以被录用在第III台机器上工作(她的生产率是12兹罗提)，但这样一来，第I台机器要交给 D(生产率11兹罗提)．由于第I台机器生产率变了，男裁缝这时损失 $15-11=4$ 兹罗提，因此他最好是让 F 上第III台机器(生产率11兹罗提)，这时，他在第III台机器上仅损失 $12-11=1$ 兹罗提．

第IV台机器上最高生产率也是女裁缝 C 达到的．但是，象刚才对第III台机器的讨论一样，可以发现最好是委托给 G．

这样，我们得到被录用的女裁缝与机器的下列安排：

I—C, II—E, III—F, IV—G, V—D.

这时，这家店的生产率是 $15+10+11+10+14=60$ 兹罗提，这比起第III、IV台机器的女裁缝，以 C 的生产率工作所能达到的生产率(62兹罗提)少不了多少．

67. 这一类问题叫运动竞赛问题，现在是博奕论的一个特殊部分。

我们介绍两种解法：第一种是初等的，第二种用了微分方程论的最简单的方法。把不同的方法比较一下不是没有价值的，对某些读者来说显然是有益的。

解法一：走私者脱离包围所能采取的策略，例如，可以始终沿通过正六边形（它的顶点在开始时分布着警察的汽艇）任一边中点的直线驾驶摩托艇开去。

设 O 是正六边形的中心，它是摩托艇的位置。又设 A、B 是此六边形的顶点，它们是警察汽艇占有的位置（图 84）。接到命令后，警察 A 始终严格地向摩托艇前进，因此他的汽艇画出了某条弧 AA'。如果汽艇沿线段 AS 运动，这里，S 是等边三角形 AOB 的中心，那末他走的路比 AA' 弧要短得多。但即使如此，我们证明走私者也能逃脱追捕。显然，$v_a=4/5\,v_0$，这里 v_a 是汽艇速度，v_0 是摩托艇速度。如果走私者在 S 点，则警察位于线段 AS 上的 A_1 处，它距 A 点 $4/5\,AS$（图 85）。设在 A_1 处警察选定了最好的策略：使自己的汽艇抢先占到 C 点而截获走私者的摩托艇。显然，如果能这样的话，将有 $A_1C=4/5\,SC$。把 A_1S 的长度记为 x，并对 $\triangle A_1SO$ 应用余弦定理，得

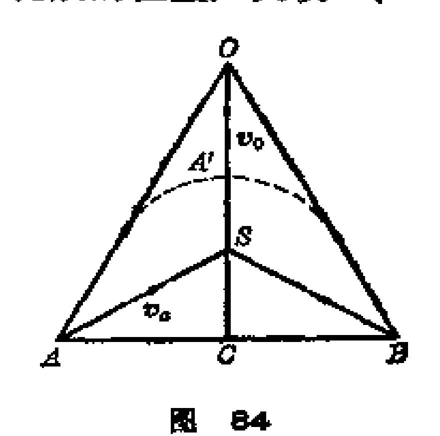


图 84

$$\left(\frac{4}{5}SC\right)^2=SC^2+x^2-2SC\cdot x\cdot\frac{1}{2}$$

或

$$x^2-SC\,x+\frac{9}{25}SC^2=0.$$

因为这个二次方程的判别式是负的：

$$\Delta = SC^2 - \frac{36}{25}SC^2 < 0,$$

所以警察抓不到走私者.

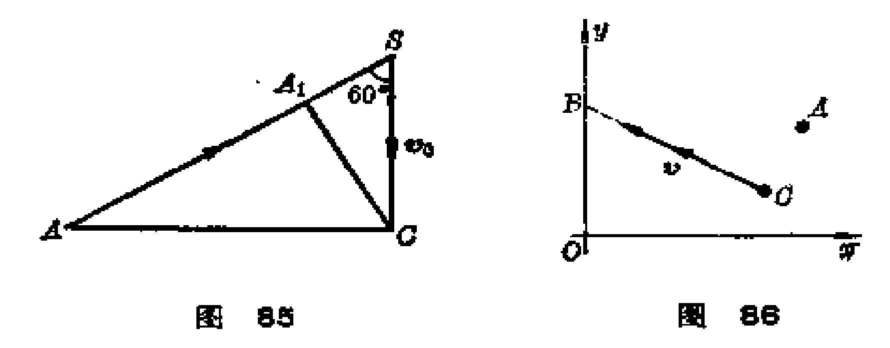


图 85　　　　图 86

解法二：设 t 表示时间. 设 $t=0$ 时走私者的摩托艇在坐标原点，警察的汽艇在点 $A(x_0, y_0)$，而走私者沿 Oy 轴运动(图 86). 在时刻 t，走私者在点 $(0, 25t)$ 处，警察在某个点 $C(x, y)$. 设

$$x=x(t), \quad y=y(t)$$

是汽艇的运动方程，则 $\boldsymbol{V}=(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$，其中 $\dot{x}=dx/dt$，$\dot{y}=dy/dt$ 是汽艇的速度向量. 显然，$\boldsymbol{V} /\!/ \boldsymbol{CB}$. 但向量 $\boldsymbol{CB}=(O-x, 25t-y)$，因而

$$\frac{\dot{x}}{-x}=\frac{\dot{y}}{25t-y}$$

或

$$\dot{x}(y-25t)=\dot{y}x. \tag{1}$$

根据条件，$|\boldsymbol{V}|=20$ 节，因此

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=20. \tag{2}$$

考察方程(1)和(2). 我们引进一个新记号 $u=x/(y-25t)$，那末 $y-25t=x/u$，方程(1)成为

$$-\dot{x}x/u=\dot{y}x \tag{3}$$

或

$$\dot{x}/u=\dot{y}. \tag{4}$$

同样地，方程(2)成为

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{x}^2/u^2}=20,$$

或

$$\pm\dot{x}\sqrt{1+1/u^2}=20, \tag{5}$$

其中的符号取得使 $\pm\dot{x}\sqrt{1+1/u^2}>0$。由于 $y-25t=x/u$，所以

$$dy-25dt=\frac{udx-xdu}{u^2},$$

由此

$$\dot{y}-25=\frac{u\dot{x}-x\dot{u}}{u^2}$$

或

$$\dot{y}=\frac{u\dot{x}-x\dot{u}}{u^2}+25.$$

把上式代入方程(4)得

$$\dot{x}u=\frac{u\dot{x}-x\dot{u}}{u^2}+25,$$

或

$$\frac{x\dot{u}}{u^2}=25,$$

$$\dot{u}=\frac{25u^2}{x}. \tag{6}$$

把(5)的两边分别除以(6)的两边，得

$$\pm\frac{\dot{x}}{\dot{u}}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}=\frac{20x}{25u^2}.$$

但 $\dot{x}/\dot{u}=dx/du$，因而 $\pm dx\sqrt{1+1/u^2}/du=4x/5u^2$，$dx/x=\pm 4du/5u\sqrt{u^2+1}$ 或

$$\int\frac{dx}{x}=\pm\frac{4}{5}\int\frac{du}{u\sqrt{u^2+1}}.$$

计算这两个积分得

$$\ln c|x| = \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+1}-1}{u}\right|,$$

其中 c 是任意常数. 这样,

$$cx = \pm\frac{\sqrt{u^2+1}-1}{u}.$$

或 $cxu = \pm(\sqrt{u^2+1}-1)$. 我们把常数 c 的符号选得使 $cxu = \sqrt{u^2+1}-1$. 以 $u = x/(y-25t)$ 代入之, 得

$$\frac{cx^2}{y-25t} = \frac{\sqrt{x^2+(y-25t)^2}}{\pm(y-25t)}-1,$$

由此

$$cx^2 = \sqrt{x^2+(y-25t)^2}\mp(y-25t),$$

或

$$cx^2\pm(y-25t) = \sqrt{x^2+(y-25t)^2}.$$

两边平方得

$$c^2x^4\pm 2cx^2(y-25t) = x^2,$$

或(约去 x^2)

$$c^2x^2\pm 2cx\frac{dy}{dx} = 1.$$

显然, 这个方程里 $c\neq 0$, 否则将有 $0=1$. 因而

$$dy = \frac{1-c^2x^2}{\pm cx}dx,$$

$$y = \pm\int\frac{1-c^2x^2}{cx}dx = \pm\frac{1}{2c}\ln|x|\mp\frac{c}{4}x^2+c_1.$$

当 $x\to 0$ 时, $y\to\infty$. 由此得出结论: 警察的汽艇无论如何也不会达到 Oy 轴, 也就是说, 抓不到走私者.

在把方程变形时约去了 x^2. 若 x 恒等于 0, 即若点始终在 Oy 轴上, 那末这个运算是不可能的. 但我们总能把坐标轴取得使在 Oy 轴上, 当 $t=0$ 时, 一艘警察的汽艇都没有.

从上述解法可知, 只要不朝着警察的汽艇走, 沿直线向任

何方向行驶，走私者都能逃脱追捕.

68. 宇航员在 P_0 点着陆，前往 P_1 点，又从 P_1 点去点 $P_2 \neq P_0$. 因而，P_2 离 P_1 比 P_0 离 P_1 还要远：

$$P_0P_1 < P_1P_2. \tag{1}$$

当继续往前走时，每走一段都不比前一段短：

$$P_1P_2 \leqslant P_2P_3 \leqslant P_3P_4 \leqslant \cdots \leqslant P_{n-1}P_n. \tag{2}$$

如果第 n 段末宇航员返回 P_0，那末由(1)、(2)不等式

$$P_0P_1 < P_{n-1}P_0$$

成立. 这与 P_1 是距 P_0 最远的点矛盾.

69. 矿湖问题与所谓星形集的理论有关.

一般说来，星形集不是凸集，但它至少有一个点，连接此点与该集所有点的线段均属于该集. 矿湖问题归结为证明具有上述性质的点的集是凸集.

设 Σ 为湖面上可以看到整个湖的点的集，这些点记为 $A, B, C, \cdots$. 需要证明，若 $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$, C 在线段 AB 上，则 $C \in \Sigma$.

设 P 是湖面上任一点. 我们证明从 C 点看得见 P 点. 因为 $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$, 故线段 AP 和 BP 整个地通过湖，没有一处通过陆地（图 87）. 点 C 在点 A、B 之间，因而线段 CP 在 $\triangle ABP$ 内. 现在，设从 C 点看不见 P 点. 此时，在线段 CP 上应该有不属于湖面的某个点 Q. 但此时 Q 点将挡住线段 BQ 延长线上的点，而且从 B 看不见 AP 与 BQ 的延长线的交点 R. 这与 $B \in \Sigma$ 矛盾. 所以，从点 C 看得见湖面上的任何

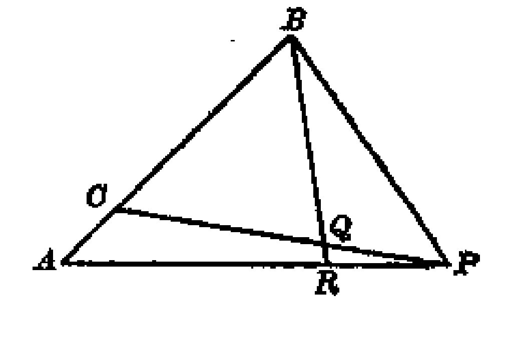


图 87

一点.

70. 本题所说的两张地图是相似矩形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$，并且点 A 对应 A'，点 B 对应 B' 等等.

若 $AB /\!/ A'B'$，则两个矩形位似(在图 88 上表示正位似，图 89 是反位似). 这时，学校的和透明纸上的对应于同一地点的两个点(且只有两个)，与位似中心 O 重合. O 点是直线 AA' 和 BB' 的交点.

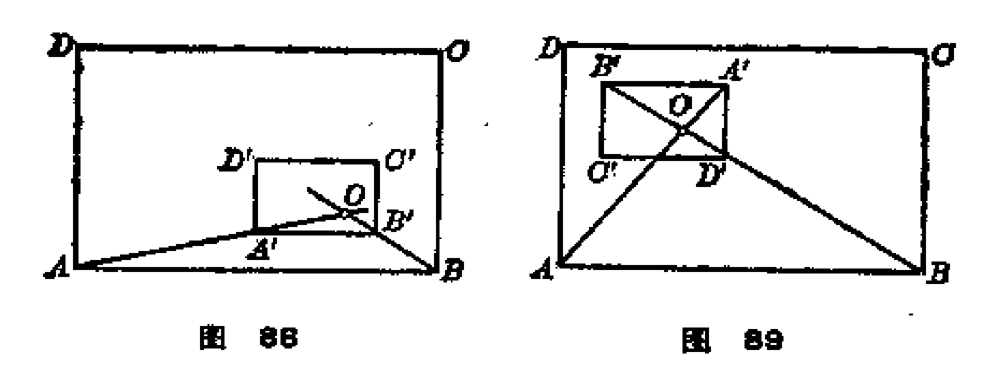


图 88　　图 89

如果把摹本绕位似中心转动到(关于学校地图下边缘的)某个倾斜位置，则两张地图不再位似，但仍相似.

设摹本斜放在学校的地图上，我们打算找一个点 O，它既是摹本的转动中心，同时又是原来位置($AB /\!/ A'B'$ 时)的位似中心.

直线 AB 和 $A'B'$(图 90)在 E 点相交，直线 CD 和 $C'D'$ 交于 F 点. AD 和 $A'D'$ 交于 G，BC 和 $B'C'$ 交于 H. EF 和 GH 交于所求的点 O.

我们来证明这个结论. 设 $AB=a$，$A'B'=a'$，$BC=b$，$B'C'=b'$. 显然

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=s,$$

这里，s 是相似系数.

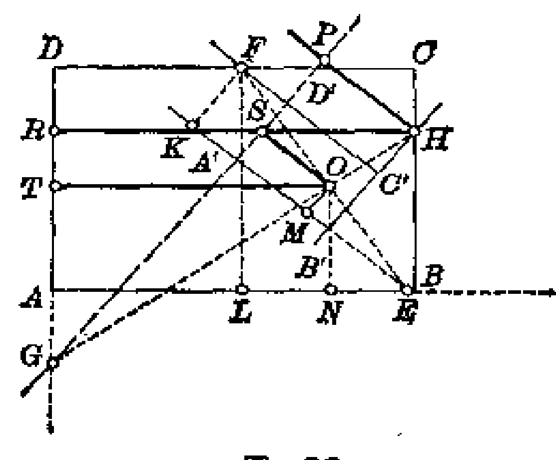


图 90

其次，$OM\perp A'B'$，$FK\perp A'B'$，并且点 M 和 K 在 $A'B'$ 上。此外，$ON\perp AB$，$FL\perp AB$，并且点 N 和 L 在 AB 上。

因为 $\triangle NOM$ 和 $\triangle LFK$ 位似（F 是位似中心），所以

$$\frac{OM}{ON}=\frac{FK}{FL}=\frac{b'}{b}=s.$$

不难看出，$OS\perp A'D'$，$HP\perp A'D'$，点 S 和 P 在 $A'D'$ 上。类似地，$OT\perp AD$，$HR\perp AD$，点 T 和 R 在 AD 上。

$\triangle TOS$ 和 $\triangle RHP$ 位似（G 是位似中心），所以

$$\frac{OS}{OT}=\frac{HP}{HR}=\frac{a'}{a}=s,$$

而由于

$$\frac{OS}{OT}=\frac{OM}{ON},$$

所以

$$\frac{OS}{OM}=\frac{OT}{ON}.$$

从最后一个等式知道，O 是所求的点。

71. 在图 91 上画出了细线的初始位置（$ABCD$）及偏离轴截面的位置（$ABC'D'$）。设 $\alpha=\angle DOD'=\angle COC'$（图 92），

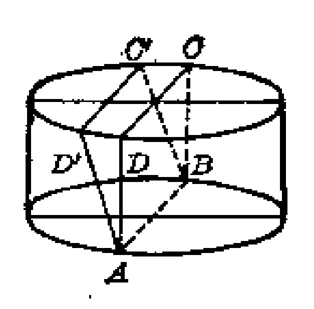


图 91

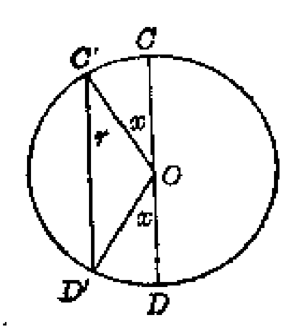


图 92

则 $D'C'=2r\cos x$. 弧 DD' 等于 rx, 而线段 $AD'=BC'=r\sqrt{1+x^2}$.

细线在初始位置 $ABCD$ 的长度等于 $6r$, 而在偏离位置 $ABC'D'$ 的长度等于

$$2r+2r\sqrt{1+x^2}+2r\cos x=2r(1+\cos x+\sqrt{1+x^2}).$$

考虑这两个量的差

$$\begin{aligned}y(x)&=6r-2r(1+\cos x+\sqrt{1+x^2})\\&=2r(2-\cos x-\sqrt{1+x^2}).\end{aligned}$$

如果我们能证明 $y(x)$ 的值总大于 0, 那末细线就可以既不解开也不拉断地从罐头上取下.

我们指出, 当 $0<x<\pi/2$ 时, 函数 $y(x)$ 的导数是正的, 即

$$y'=\sin x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0.$$

事实上, 设 $x=\operatorname{tg}\alpha$, 则

$$\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

但对所有 α, 不等式

$$\alpha<\operatorname{tg}\alpha=x$$

成立, 所以对 $0<\alpha<x<\pi/2$ 有

$$\sin\alpha<\sin x,$$

或
$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\sin x.$$
所以，$0<x<\pi/2$ 时有
$$\sin x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0.$$

这样，函数 $y(x)$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 上单调增，当 $x=0$ 时取得极小值，当 $x=\pi/2$ 时取得极大值：
$$y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2r\left(2-\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\right)>0.$$

这就是说，在初始位置与偏离位置，细线长度之差总是正的，所以无需解开或拉断就可把它从罐头上取下来.

如果不考虑摩擦，细线在初始位置的平衡是不稳定的.

72. 变元 X 和 Y 可取四个值 O、A、B、AB. 因而，总共可以写出 16个关系式 $X\to Y$，其中有一些根据法则 I～III 是真的，另一些根据法则 IV 是假的. 在法则 I～III 中，以四个可能的值代 X，得到下列真关系式：$O\to O$，$O\to A$，$O\to B$，$O\to AB$，$A\to A$，$A\to AB$，$B\to B$，$B\to AB$，$AB\to AB$. 其余的($A\to O$，$A\to B$，$B\to O$，$B\to A$，$AB\to O$，$AB\to A$，$AB\to B$)根据法则 IV 是假的. 由此直接得知，法则 I～IV 是不矛盾的，因为从它们不会推出两个相互排斥的关系式. 完全一样地可以确信，从法则 I～IV 可得关系式 $\overline{A\to B}$(因为 $A\to B$ 假).

剩下来还要证明关系"$\to$"的传递性，即从 $X\to Y$ 和 $Y\to Z$ 得 $X\to Z$. 因为变元 X、Y、Z 都只取四个值，所以考察血型 O、A、B、AB 的全部组合，可以证明关系$\to$的传递性.

若 $X=O$，则 Y 和 Z 都可以取使 $Y\to Z$ 成立的任意值. 根据法则 III，$O\to Z$ 对任何 Z 真，因而 $X=O$ 时关系$\to$是传

递的.

现在证明 $X\neq O$ 时→的传递性.

若 $X=A$, 则可有三种情形: (a) $Y=A$, $Z=A$; (b) $Y=A$, $Z=AB$; (c) $Y=AB$, $Z=AB$. 由此得到三个命题:

(a) 若 $A\to A$, $A\to A$, 则 $A\to A$;

(b) 若 $A\to A$, $A\to AB$, 则 $A\to AB$;

(c) 若 $A\to AB$, $AB\to AB$, 则 $A\to AB$.

从法则 I、II 可知这三个命题都是真的. 类似地可以证明 $X=B$ 时→的传递性, 只要在上述命题中以 B 代替 A (符号 AB 不动).

最后考虑 $X=AB$, $Y=AB$, $Z=AB$ 的情形, 相应的命题是:

$$\text{若 } AB\to AB,\ AB\to AB,\ \text{则 } AB\to AB.$$

这显然是真的.

这样, 本题已完全解决.

78. 解释大学生得到的结论是简单的: 第三个大学生的血型是 A 或 B.

我们证明, 如果第三个大学生的血型是 A, 那末用它的血能鉴定任何病人的血型 X. 事实上, 检验他和病人 X 的血可以有四种情形:

(1) $A\to X$, $X\to A$; (2) $A\to X$, $(\overline{X\to A})$;

(3) $(\overline{A\to X})$, $X\to A$; (4) $(\overline{A\to X})$, $(\overline{X\to A})$.

(横线表示否定)

在第一种情形, 从 $A\to X$ 得 $X\neq B$, $X\neq O$, 而从 $X\to A$ 得 $X\neq AB$, 因此 $X=A$.

在第二种情形, 从 $A\to X$ 得 $X\neq B$, $X\neq O$, 而从 $\overline{X\to A}$ 得 $X\neq O$, $X\neq A$, 因此 $X=AB$.

在第三种情形，从 $\overline{A \to X}$ 得 $X \neq A$, $X \neq AB$，而从 $X \to A$ 得 $X \neq B$，因此 $X = O$.

最后，在第四种情形，从 $\overline{A \to X}$ 得 $X \neq A$, $X \neq AB$，而从 $\overline{X \to A}$ 得 $X \neq O$, $X \neq A$，因此 $X = B$.

这样，在各种情形，只要用血型 A 就能确定病人的血型. 类似地可以证明用 B 型血鉴定任何血型的可能性.

现在证明，本题的全部条件，只适用于第三个医科大学生的血是 A 或 B 型. 事实上，设 X、Y、Z 是三个大学生的血型. 检查 X 和 Y 的血，学生们能得到下述四个结论之一：

(1) $X \to Y$, $Y \to X$;　　(2) $X \to Y$, $(\overline{Y \to X})$;

(3) $(\overline{X \to Y})$, $Y \to X$;　　(4) $(\overline{X \to Y})$, $(\overline{Y \to X})$.

在第一种情形，两个关系式只在 $X = Y$ 时真. 因而，这时学生们不能鉴定自己的血型.

在第二种情形，从 $\overline{Y \to X}$ 得 $Y \neq X$, $X \neq AB$, $Y \neq O$. 其次，由于应该有 $X \to Y$，所以只能有 $X = O$, $Y = AB$.

类似地，在第三种情形只允许 $Y = O$, $X = AB$.

最后，在第四种情形，从 $\overline{X \to Y}$ 得 $X \neq Y$, $X \neq O$, $Y \neq B$; 其次，从 $\overline{Y \to X}$ 得 $X \neq AB$, $Y \neq O$. 与第一种情形一样，两个大学生不能鉴定自己的血型，因为既可能 $X = A$, $Y = B$，又可能 $X = B$, $Y = A$.

因此，头两个学生只有在一个人是 O 型，另一个人是 AB 型时才能鉴定自己的血型.（扩大检查范围，把第三个大学生包括进去也不会改变这个结论. 因为，根据问题的条件，不能鉴定第三个大学生的血型，从而扩大检查的结果只能是第一和第四种情形，不能鉴定头两个学生的血型.）

这样，设 $X = O$, $Y = AB$. 第三个学生不能是 O 型血，因为，如果是 O 型的话，检查 Y 和 Z 的血，学生们就得到了第

二或第三种情形①里指出的结论，从而能确定 Z 的血型．第三个学生也不能是 AB 型血，否则，检查 X 和 Z 的血，学生们仍得到第二或第三种情形里的结论．

最后，设第三个大学生的血型 Z 是 A 或 B．把三个人的血一起检查，我们发现 $O\to Z$，$\overline{Z\to O}$．因此，$Z\neq O$，$Z\to AB$，$\overline{AB\to Z}$，从而 $Z\neq AB$．这样一来，$Z=A$ 或 $Z=B$，无论用什么方法，都不能确定这两种可能性中哪一种符合实际情形．

74．答：姐妹不能代替母亲输血给两兄弟．

我们证明这个结论．

两兄弟都不会是 O 型血（因为，有 O 型血的人可输血给另一个），也不能是 AB 型（因为，有 AB 型血的人可以毫无危险地接受另一个输的血），因而，他们两人一个是 A 型，一个是 B 型．

由于母亲可以输血给他们两人，所以她的血只能是 O 型．其次，从血型的遗传性可知，他们的父亲必定是 AB 型血，否则，他的儿子不可能是 A 型或 B 型血．同样地，根据遗传性定律，与两兄弟同父母的姐妹的血型也应该是 A 或 B．事实上，根据本题中所说的规则，我们知道，母亲的血型是 OO，父亲的是 AB，可能的血型组合只是 OA 或 OB，即 A 或 B．

因而，有血型 A 或 B 的姐妹只能代替母亲输血给两兄弟之一．

75．(1) 把边长为 10 cm 的 65 个方块象图 93 所示那样放置．此时，$OA^2=OA_1^2+AA_1^2=2250<50^2$，$OB^2=OB_1^2+BB_1^2=2250<50^2$，$OC^2=OC_1^2+CC_1^2=2450<50^2$，$OD^2=OD_1^2+DD_1^2=2450<50^2$．用这种方法放置方块时，半径为 50 cm

① 在假设 $X=O$，$Y=AB$ 时，如果 $Z=O$，检查 Y、Z 的血时只能出现第二种情形，如果 $Z=AB$，检查 X、Z 的血只能出现第三种情形．——译者

的圆能放的不止 64 块，连 65 块也能放，所以这个圆不是包含 64 个方块的半径最小的圆.

(2) 在半径为 50 cm 的圆内，能放置边长为 10 cm 的 67 个方块. 如图 94 那样. 事实上，

$$OA^2=OA_1^2+AA_1^2=2425<50^2,$$
$$OB^2=OB_1^2+BB_1^2=2500=50^2,$$
$$OC^2=OC_1^2+OC_1^2=2500=50^2,$$
$$OD^2=OD_1^2+DD_1^2=2425<50^2.$$

76. 在半径为 20 cm 的圆内，可放置 8 块边长为 10 cm 的方块(图 95).

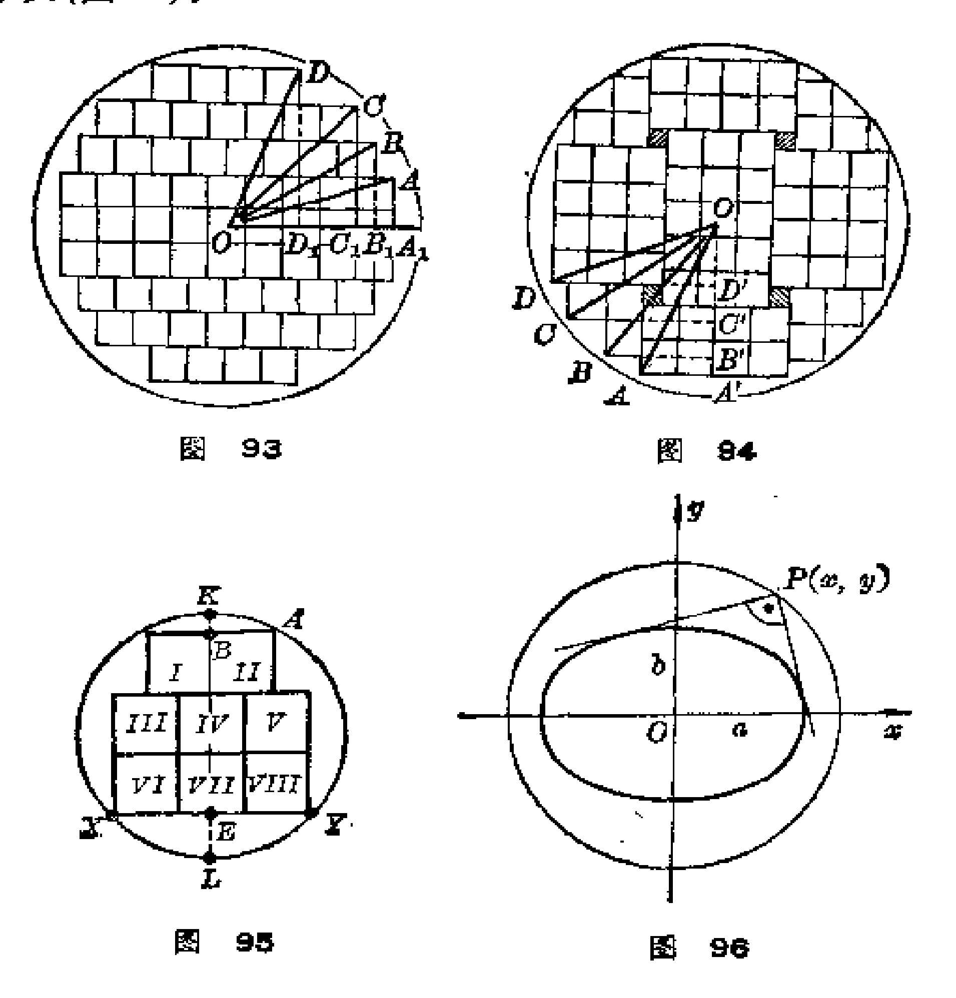


图 93　　图 94

图 95　　图 96

点 B 和 E 在直径 KL 上，点 A 是正方形 II 的顶点，点 X 和 Y 是弦的端点，这弦垂直于直径 KL，并通过正方形 VII 的底边上的点 E.

从 $\triangle AKL$ 可得，

$AB=\sqrt{BK\cdot BL}$ 或 $AB=\sqrt{BK\cdot(40-BK)}=10$,

由此，$BK=10(2-\sqrt{3})$. 因而，$EL=10-BK=10(\sqrt{3}-1)$，$EK=30+BK=50-10\sqrt{3}$. 从 $\triangle KLX$ 得

$$EX=\sqrt{EK\cdot EL}=10\sqrt{(5-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$$
$$=10\sqrt{6\sqrt{3}-8},$$

由此，$$XY=20\sqrt{6\sqrt{3}-8}\approx 30.9.$$

这样一来，邻接的正方形 VI、VII、VIII 的底边之和小于弦 XY.

77. 我们在塔（和栅栏）的横截面上引进直角坐标系（图 96），它的原点与圆（栅栏的截面）心重合. 我们证明，塔的水平截面是半径为 $a=4m$, $b=3m$ 的椭圆.

我们写出通过圆上一点 $P(X, Y)$ 与椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 相切的直线方程. 通过点 $P(X, Y)$ 的直线方程是 $y-Y=m(x-X)$ 或

$$y=mx+(Y-mX). \tag{1}$$

从解析几何知道，使方程为 $y=mx+n$ 的直线与椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 相切，只要下面的条件成立：

$$b^2+a^2m^2-n^2=0. \tag{2}$$

从(1)、(2)得

$$b^2+a^2m^2-(y-mX)^2=0. \tag{3}$$

解方程(3)，得到所求切线斜率的两个值. 根据本题条件，需要使塔截面的两条切线之间的夹角是直角（图 96），也就是要

使 $m_1m_2=-1$，这里的 m_1 和 m_2 是方程(3)的根．把这个方程变形为

$$(a^2-X^2)m^2+2XYm+(b^2-Y^2)=0.$$

根据韦达定理，

$$m_1 m_2=\frac{b^2-Y^2}{a^2-X^2}.$$

因而，使椭圆的两条切线之间的夹角为直角，必要充分条件是

$$\frac{b^2-Y^2}{a^2-X^2}=-1,$$

或

$$X^2+Y^2=a^2+b^2.$$

这样，从半径为$\sqrt{a^2+b^2}$、圆心为坐标原点的圆上任何一点，看椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的水平视角为直角．

本题中，$a=4$，$b=3$，因而 $r=\sqrt{a^2+b^2}=5$．问题的条件是完全满足的．

78．我们讲两种解法．

1．在任何时刻，板都绕着大木头横截面边界上的某个点转动，所以在板的端点所画的线上，每个点的切线应该与这个点所对应的板的位置形成直角．如果板的端点描出直线，那末板只能平移而不能成为跷跷板．

因此，板的端点的轨迹不会是直线．

2．不失一般性，可以假定大木头的横截面是凸的(如果它不是凸的，那末我们应该考虑它的凸包①)．板的端点的轨迹是大木头横截面的渐屈线(横截面的边界，是板的端点所描曲线的曲率中心的轨迹，即渐伸线)．但曲线的渐屈线不可能是直线(因为直线的渐伸线的点是无限远的)．这个结论的精确证明可以在微分几何教科书中找到．

① 包含集 E 的最小凸闭集叫 E 的凸包。——译者

79. 如果默认汽油和煤油的密度不同，那末从问题的条件推知，3.5 公升煤油重 3 公斤，5 公升汽油重 4 公斤．因此，煤油的密度是 $3/3.5=6/7$（公斤/公升），汽油的密度是 $4/5$(公斤/公升)．知道了这两种燃料的密度，不难计算借来的(以及归还的)混合物的体积是 8.5 公升，重 7 公斤，密度是 $7:8.5$ 公斤/公升．

但萨拉杰克博士断言，司机们不善于区分煤油和汽油．由此可得，“汽油”和“煤油”的密度可以是相同的．把未知的密度记为 x，我们得到方程

$$3+5x=3.5x+4,$$

因而 $x=2/3$．这样一来，对司机们不满意的萨拉杰克博士，能从有相同密度的汽油和煤油得到密度不过是 0.667 公斤/公升的混合物，它比原来的两桶混合物要轻得多．

这个问题也可以通过另一条途径解决．把煤油密度记为 x，汽油密度记为 y，由题设得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x}+5=3.5+\dfrac{4}{y},\\ 3+5y=3.5x+4.\end{cases}$$

对其中一个方程解出 y 并代入另一个方程，得到 x 的二次方程

$$21x^2-32x+12=0.$$

这样，问题有两解：$x_1=6/7$, $y_1=4/5$; $x_2=2/3$, $y_2=2/3$. 第一组解是司机所用的混合物，第二组解是萨拉杰克所说的混合物．

注 有一位读者注意到，萨拉杰克博士说的结论，现代汽车发动机不用这样重的混合燃料是不对的，狄塞尔发动机(柴油机)用密度从 0.85 到 0.88 公斤/公升的燃料．

80. 萨拉杰克博士的魔书是以下述原则为基础的.

考虑 10000 对数$(n, nz-[nz])$，这里，$z=(\sqrt{5}-1)/2$ 是(与"黄金分割"联系在一起的)"黄金数"，n 是从 1 到 10000 的自然数列，符号$[x]$是数 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数. 把这些数偶这样地分布，使它们的第二个数 $nz-[nz]$ 形成增列，然后，按照这种次序写出每个数偶对应的第一项 n，所得的表叫"铁数"表.

例如，我们对 $n=10$，即对自然数 1 到 10 作铁数表.

设$\sqrt{5}\approx2.236$，则 $z=(\sqrt{5}-1)/2\approx0.618$. 对这 10 个数有：

n	$nz-[nz]$	n	$nz-[nz]$
1	0.618	6	0.708
2	0.236	7	0.326
3	0.854	8	0.944
4	0.472	9	0.562
5	0.090	10	0.180

$nz-[nz]$这一列中最小的数是 0.090，因而，对头十个自然数构造的铁数表，它的第一个位置应该放 5，然后是 10，2，7，4，9，1，6，3，8.

这样一来，自然数列从 1 到 10 这一段的铁数表是：

5，10，2，7，4，9，1，6，3，8.

类似地，对自然数列随便多长的一段可以构造铁数表.

任何一张铁数表，不管用哪些数构造它，都有下列性质：相邻两数之差只能取三个值(应为至多取三个值.——译者).

例如，上面这张表里，相邻两数之差是

5，−8，5，−3，5，−8，5，−3，5.

它只取 5，−8，−3 这三个值.

当从铁数表里去掉所有比任意指定的某个数大的数，或者，去掉所有比任意指定的某个数小的数，或者，去掉任意两个数之间的数时，铁数表的这种性质仍然保持. 例如，在上面所举出的表里去掉比 3 小的所有的数，便得到“缩减的”表

$$5,\ 10,\ 7,\ 4,\ 9,\ 6,\ 3,\ 8.$$

它的相邻项之差仍然只取三个值(只有两个——译者)

$$5,\ -3,\ -3,\ 5,\ -3,\ -3,\ 5.$$

萨拉杰克博士珍视的魔书，就是建立在铁数表的这种性质上的.

81. 首先指出，用 10、30、90、270 克这一套砝码能称 10 克到 400 克的任何货物，精确到 10 克：

$10=10,$ $20=30-10,$
$30=30,$ $40=30+10,$
$50=90-30-10,$ $60=90-30,$
$70=90+10-30,$ $80=90-10,$
$90=90,$ $100=90+10,$
$110=90+30-10,$ $120=90+30,$
$130=90+30+10,$ $140=270-90-30-10,$
$150=270-90-30,$ $160=270+10-90-30,$
$170=270-90-10,$ $180=270-90,$
$190=270+10-90,$ $200=270+30-90-10,$
$210=270+30-90,$ $220=270+30+10-90,$
$230=270-30-10,$ $240=270-30,$
$250=270+10-30,$ $260=270-10,$
$270=270,$ $280=270+10,$
$290=270+30-10,$ $300=270+30,$
$310=270+30+10,$ $320=270+90-30-10,$
$330=270+90-30,$ $340=270+90+10-30,$

$350=270+90-10$,　　$360=270+90$,

$370=270+90+10$,　　$380=270+90+30-10$,

$390=270+90+30$,　　$400=270+90+30+10$.

另一套10、20、40、80和160克的砝码，能称10克到310克的任何货物，精确到10克：

$10=10$,　　$20=20$,

$30=20+10$,　　$40=40$,

$50=40+10$,

$60=40+20=80-20=160-80-20$①

$70=80-10$,　　$80=80$,

$90=80+10$,　　$100=80+20$,

$110=80+20+10$,　　$120=80+40$,

$130=80+40+10$,　　$140=160-20$,

$150=160+10-20$,　　$160=160$,

$170=160+10$,　　$180=160+20$,

$190=160+20+10$,　　$200=160+40$,

$210=160+40+10$,　　$220=160+40+20$,

$230=160+40+20+10$,　　$240=160+80$,

$250=160+80+10$,　　$260=160+80+20$,

$270=160+80+20+10$,　　$280=160+80+40$,

$290=160+80+40+10$,　　$300=160+80+40+20$,

$310=160+80+40+20+10$.

杂货铺主人在一个天平盘上，放上顾客所需要的重量的砝码，而在另一个盘上放上，例如一包砂糖，在两边还没有平衡之前，补进或倒出一些糖．为了称货物，铺主可以用第一套砝码，也可以用第二套．不过，第一套对他更方便些，因为用它可以称10克到400克的食品杂货．用第二套五个砝码，只

① 下面不再列出不同的称法。

能称 10 克到 310 克货物．为了卖重量在较大范围内的货物，用第一套砝码较好．

对于店主来说，用 10、20、40、80 和 160 克 5 个砝码这一套更便利，原因如下．店主在一个天平盘上放上，例如顾客挑选的黄瓜，而在另一个盘里应该放上重量等于黄瓜的砝码．设黄瓜重 100 克，可以在另一个盘上，放上最重的砝码，它显然比黄瓜重．然后，在放了黄瓜的盘里放 80 克重的砝码，这样，有黄瓜的盘要重．接着，他把 40 克的砝码放在另一个盘里（结果这边又要下沉），最后，在有黄瓜的盘里放 20 克的砝码，两个盘达到了平衡．这种方法能够称 10 到 310 克之间的货物，并精确到 10 克．如果对 10、30、90、270 克的一套砝码用这种方法，不可能以同样的精确度称 100 克的黄瓜，而只能确定黄瓜的重量小于 140 克．因此，对于店主来说，用 10、20、40、80、160 克这一套砝码要更便利些．

82．本题里所有问题的回答都是肯定的．

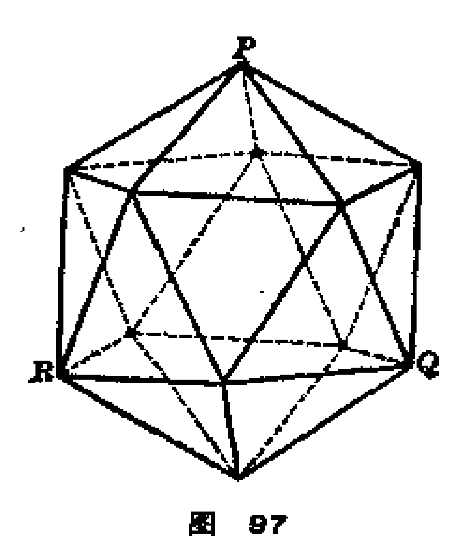


图 97

为了回答第一个问题，我们把这 12 个人的团体的每个成员，想象为正二十面体的一个（且只是一个）顶点．如果两个人所对应的顶点是由这个正二十面体的棱连接的，那末他们是认得的．

我们断言，本题的条件(1)到(6)都是成立的．下面一个个地验证．

从正二十面体的每个顶点出发，有五条棱把它与另五个顶点连接，所以每一个成员与 5 个成员熟悉，而不认识另外六个人．因而条件(1)成立．

属于同一个面的顶点对应于互相认识的三人小组，因而条件(2)也成立.

如果成员中存在彼此认识的四个人，那末在二十面体的顶点中，能够指出由棱两两连接的四个顶点. 显然，彼此认识的四个人里任何三个也彼此认识，因而，所对应的三个顶点属于同一个面. 这样，我们应该找这样的四个顶点，其中每一个都与在同一个面里的三个顶点之间有棱连接. 这样的点在正二十面体中是没有的，所以条件(3)成立.

现在，我们要找三个顶点，它们对应于彼此不认识的三个人. 由于正二十面体的所有顶点是平等的，所以只要找一个这样的由三个顶点组成的小组. 设正二十面体如图97那样放置在空间中. 我们取它最上面的点作为这个小组的第一个顶点. 与这个点以棱连接的各个点不可以作为这个小组的第二、第三个顶点. 从另外六个顶点里，不难选出这样的两个点，无论在它们之间，还是在它们与上面所取的第一个顶点之间，都没有棱连接. 但是，在那六个顶点中，有这种性质的三个点是找不到的. 所以，在成员中找不到四个彼此不认识的人，但总可以找到三个互不认识的人，例如，对应于顶点P、Q、R(图97)的那些人. 这样一来，条件(4)、(5)成立.

最后，条件(6)成立，因为正二十面体的相对两个顶点，所对应的人没有共同的熟人. 因此，我们所举的例子满足本题的全部条件. 第一个问题已得到回答.

如果我们不是把成员对应于点，而是对应于正二十面体的面，那末我们又得到了一个例子. 在这个例子里，两个成员相互认识，当且仅当他们所对应的面有公共棱. 由对偶性原则①可知，我们所作的这个例子与上面那个例子是一样的.

① 见第75页上的注. ——译者

特别地，现在容易举出一个例子，它由12个人组成，满足萨拉杰克博士列举的那些条件．事实上，如果在条件(2)、(3)、(4)、(5)中，以“不认识”代替“认识”，那末我们仍然得到条件(2)、(3)、(4)、(5)(只是次序不同)．因而，如果对正二十面体来说，把同一条棱上的两个顶点看作彼此不认识的人，而不在同一条棱上的顶点对应于彼此认识的人，那末正二十面体的顶点就是萨拉杰克博士所说的团体的例子．显然，此时每个成员恰好与另外六个成员熟悉．在条件(1)中，以“认识”和“不认识”分别代替“不认识”和“认识”，我们得到最后一个结论．

满足条件(2)、(3)、(4)、(5)的10个人的团体(其中每个人认识5个人，而且有熟人认识其它人)作法如下．在二十面体中，去掉相对的两个顶点以及从它们出发的棱．我们约定，剩下来的棱总连接着对应于彼此认识的人的顶点，剩下来的图形(图98)中，相对的顶点 A_1 和 A_2, B_1 和 B_2, …, E_1 和 E_2 也对应于彼此认识的人．那末10个人里，每个人都有认识他们不认识的成员的熟人，这个熟人对应于与此人的顶点用同一字母(下标不同)标示的顶点．

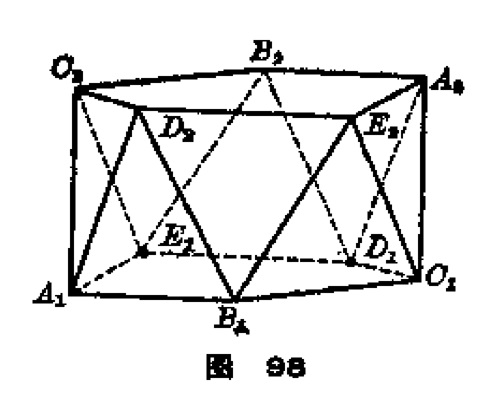


图 98

类似于上面进行的论证，可以说明条件(2)、(3)、(4)、(5)成立．

正如从第一个例子得到满足萨拉杰克博士条件的团体一样，可以从上面这个例子得到满足条件(2)到(6)的10人团体的例子．从图98还可以得到另一些例子．例如，把图98里对应于同一条棱连接的顶点的人，看作是认识的，或者把对应

于顶点 A_1 和 A_2, B_1 和 B_2, …, E_1 和 E_2 的人看作是互相不认识的. 这些结论的证明留给读者.

83. 我们讲两种解法: 第一种是"理论"解法, 第二种是"实际"解法.

(1) 在二进位制里, 任何一个正整数 N 可以表示为

$$N=\sum_i \alpha_i 2^{i-1}, \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

其中, 所有的系数 α_i 等于 0 或 1. 由此可见, 给定了 n 个系数 α_i, 我们能得到从 1 开始的 2^n 个自然数. 设 $n=20$, 那末, $2^{20}=1048576$. 由于在«辞海»中解释的词数小于 1048576, 所以可以把它们从 1 开始编号, 所用的数以二进位制表示时的符号不超过 20 个. 萨拉杰克博士可以这样地提出问题:

——您要我猜的词的号码用二进位制表示时, 第 i 个数码($i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20$)等于 1 吗?

所得到的回答或者"是", 或者"不是", 萨拉杰克博士要不了 20 步就能确定这个号码, 从而猜中你所想的词.

(2) «辞海»1979 年版共有上、中、下三册. 我们用两个问题确定要猜的词在哪一册. 假定它在最厚的有 1652 页的中册. 由于 $2^{10}<1652<2^{11}$, 所以接着用 11 个问题可以确定要猜的词在哪一页. 为了知道这个词在这一页的哪一栏——左还是右, 我们要一个问题. 剩下来还有六个问题用于找某一栏里要猜的词, 这已经足够了, 因为无论哪一栏中的词都不多于 $2^6=64$ 个.

84. 设 s 是至少有某种爱好的学生数(爱好音乐, 象棋或自行车运动), x 是只去听音乐会的学生数, y 是除了下棋外什么都不喜欢的学生数, z 是只喜欢自行车运动的学生数.

第一次举手的是喜欢听音乐和爱好下棋的人, 不举手的

是只喜欢自行车运动的人，所以总共有 $s-z$ 个学生举了手。在举手的人中，两者都喜欢的有 $\frac{30}{100}(s-z)$ 个。

类似地知道，第二次有 $s-x$ 个学生举了手，举两只手的有 $\frac{35}{100}(s-x)$ 个。在第三次，有 $s-y$ 个学生举了手，其中举两只手的有 $\frac{40}{100}(s-y)$ 个。

现在，设有某种爱好（棋、音乐或自行车运动）的学生中，没有一个同时有三种爱好，那末，把有一种爱好的和有两种爱好的学生数加起来，应该得到 s。但不难看出：

$$\frac{30}{100}(s-z)+\frac{35}{100}(s-x)+\frac{40}{100}(s-y)+x+y+z$$
$$=0.65x+0.6y+0.7z+1.05s>s.$$

因此，所作的假设是错误的。

这样，萨拉杰克博士完全有把握断定，在我们这个粗心的心理学者的学生中，必定有同时爱好音乐，象棋，自行车运动的多方面兴趣的人。

95. 与第 93 题三个赛跑运动员一样，初看起来，情况似乎是自相矛盾的。棋手 D 在其与 E 所下的各盘中，有 64% 胜了 E，同样，E 胜 F 有 60% 的盘数，F 胜 D 有 60% 的盘数，并且，这三个人的平均实力都一样。

为了求 D 胜 E 的平均数，我们先求 E 赢 D 的平均数。为此，只需知道以 16 分比赛的 E 与以 12 分比赛的 D 下棋的概率。

由于棋手 E 在五盘中有三盘处在被评定为 16 分的竞技状态中，而 D 在五盘的三盘中是按 12 分比赛的，因此，所求的概率等于 $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$。这样，在 $(1-9/25)100=64\%$ 的盘

数中 D 胜 E.

在以 16 分比赛的 E 与 F 之间下棋的概率等于 3/5. 因而, E 胜 F 的平均数是 (3/5)100＝60%.

最后,因为 F 与以 12 分比赛的 E 之间下棋的概率也是 3/5, 所以 F 在 60% 的盘数中胜 D.

计算象棋俱乐部这些常客的平均实力,一点也不困难.

D 的平均力量等于 $(2\cdot17+3\cdot12):5=14$ 分, E 是 $(3\cdot16+2\cdot11):5=14$ 分, F 也是 14 分.

D 胜 E, E 胜 F, F 胜 D 的平均数不难按图 99 估计.

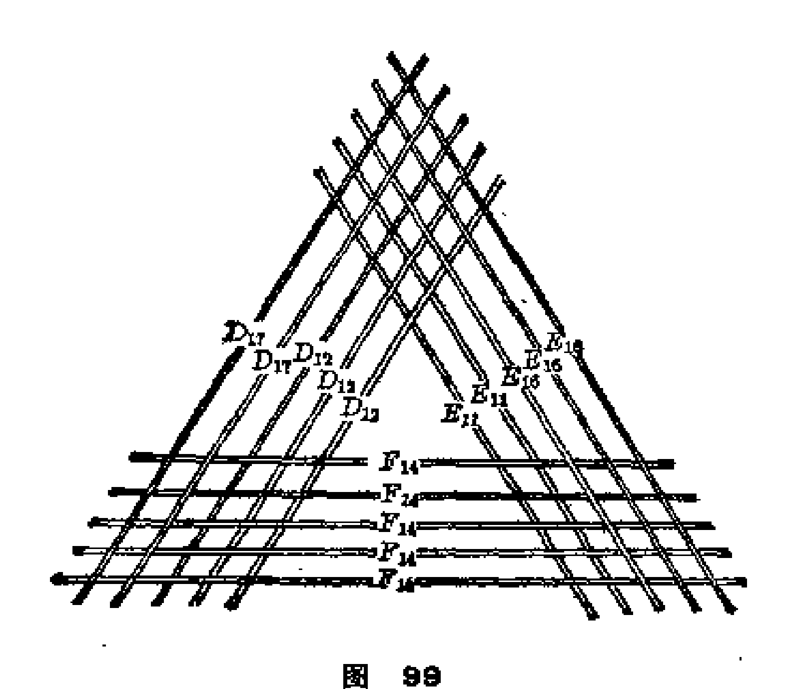


图 99

86. 从«一百个数学问题»第 94 题的注和解,本题的解的一般过程是明显的,因此我们不打算解它. 我们只指出,当顾客事先提出他需要多少布料时,用普通的尺方便;在只买零头的时候,用萨拉杰克博士的尺方便.

87. 把这只温度计上的列氏刻度和摄氏刻度的度数加起

来，再把所得的和数加上 32，萨拉杰克博士便得到了华氏刻度的温度. 事实上，设 R、C、F 分别是同一温度 t 的列氏、摄氏和华氏的度数. 从刻度的结构可知，R、C、F 的度数之间应该成立关系式

$$R=0.8C, \qquad F=1.8C+32,$$

由此，

$$F=1.8C+32=C+0.8C+32=C+R+32.$$

88. 设地球是球形的，它的大圆周长是 40000 公里(在不需要很精确的场合，常常用这个近似值). 我们证明，本题所说的那个计划是行不通的.

用反证法. 设计划是正确的，那末我们应该在地球表面上放置 5 个国际监督站，使任何两站之间的距离不小于 10000 公里. 把它们记为 A_1, A_2, $\cdots$, A_5. 考察以 A_1 为极点的半球(这并非指 A_1 站应该配置在地球的几何北极或南极，而只是说，A_1 是离开所考察的半球底面最远的点). 半球上的每个点离 A_1 不超过 10000 公里，因此，监督站 A_2, A_3, A_4, A_5 分布在另一个半球上，即在以 B 点为极点的半球上(图 100). 过轴 A_1B 和每个点 A_2, A_3, A_4, A_5 作半平面. 这些半平面都是唯一地确定的，因为 A_2, A_3, A_4, A_5 都不可能与 B 点重合(如果有一个重合，其它的点就不能在以 B 为极点的半球上了). 不失一般性，可以认为，点 A_2 和 A_3 属于通过 A_1B 轴的两个"相邻的"半平面(如果不属，只要适当地变动一下各站的编号；四个点 A_2, $\cdots$, A_5 中随便哪两个都不能在同一个 1/4 大圆上，即不可能确定同一个半平面). 至少有一个角 $A_i'OA_j'$ 不大于 $\pi/2$, 这里的 A_i', A_j' 是"赤道"上相邻的点. 设这个角是 $A_2'OA_3'$.

现在考察以 A_2 为极点的半球(图 101). B 点在这个半

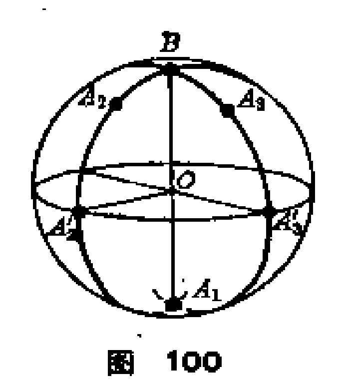


图 100

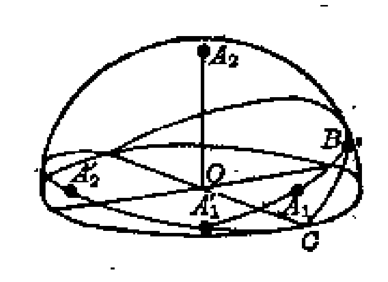


图 101

球上，因为$\angle A_2OB<\pi/2$. 点A_2'也属于这个半球，因为$\angle A_2OA_2'<\pi/2$. 此外，$\angle A_2'OC=\pi/2$. 由于$\angle A_2'OA_3'\leqslant\pi/2-\angle A_2'OC$，点$A_3'$在大圆弧$A_2'C$上. 由此可得，点$A_3$在弧$BA_3'$上，也就是，在这个半球上. 这样，从$A_2$到$A_3$的距离不超过10000公里，与题设矛盾.

文件里所说的各站的分布是不可能的，正是这一点激起了我们这位著名外交家的愤慨.

89. 如果每一只覆盖地球1/5表面的碗，至多只能罩住19个国家(联合国成员国)的首都，那末在整个地球上联合国的会员国不多于95个. 这与题设中有101个成员国矛盾. 因而，必定存在一只碗，它覆盖地球1/5表面，而且至少罩住20个联合国成员国的首都. 如果它恰好罩住了20个，那末萨拉杰克博士的问题已经解决.

现在，设每个覆盖地球1/5表面的碗，至少罩住20个成员国的首都. 仿上讨论得知，并非每个这样的碗都能罩住20个以上的首都. 如果有某只碗恰好罩住20个，则本题也已解决.

这样，设存在一只碗，它覆盖地球1/5表面，并且罩住的首都不到20个. 把这只碗沿球面从罩住20个以上首都的位置，移动到罩住不到20个首都的位置，在连续地移动的"道路

上”，必有恰好罩住 20 个首都的位置.

90. 在棋局里，将军——比如说用黑棋将军——意味着，再轮到黑棋走时，将吃掉白棋的王. 在凯达拉什走马 $g5\sim f7$ 将了萨拉杰克博士的军后，所出现的局势(图 102)中，白棋不能动任何一个棋子，并且为了将死白棋，黑棋必须连续走两步，而这是违反竞赛规则的. 同时，这种局势不能算无子可动，因为它是在将军之后产生的.

有趣的是，象棋规则上关于这种局势实际上说了些什么?

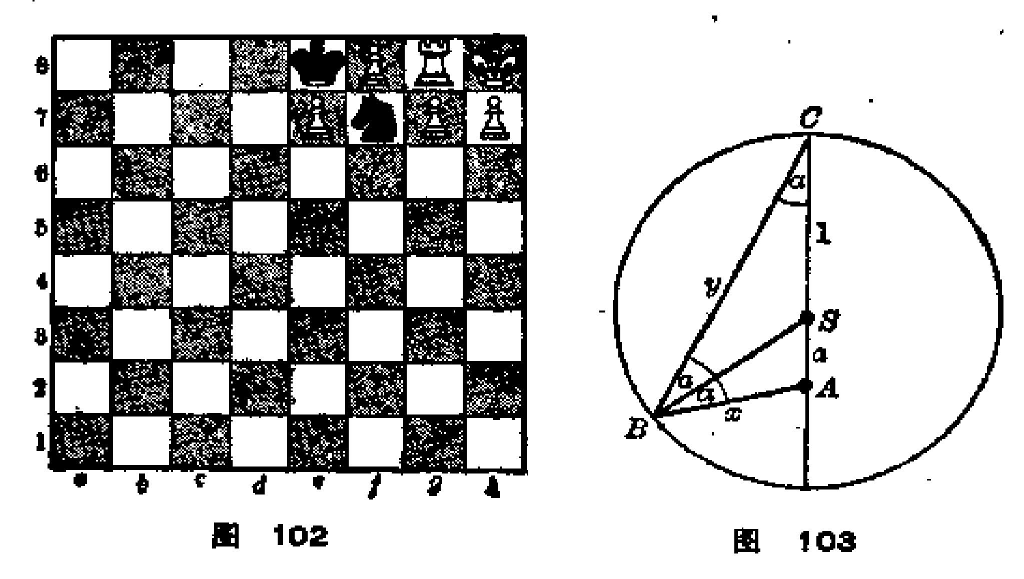


图 102　　图 103

91. 为使三种轨迹的长度相等，应有 $x+y=3-a$，其中 x 表示弹子的初始位置 A 到它碰到栏板上的点 B 之间的距离，y 是 B 点到洞 C 之间的距离，a 是 A 到弹子台中心 S 的距离(图 103).

因为 BS 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 的平分线，故 $x/a=y/1$ 或 $x/a=y$. 由 $\triangle SAB$ 与 $\triangle BAC$ 相似，得

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{1+a}.$$

把 $a=x/y$ 代入方程 $x+y=3-a$ 及上式，得

$$\begin{cases} y(x+y)=3y-x, \\ x+y=xy^2. \end{cases}$$

解关于 x 的第二个方程，

$$x=\frac{y}{y^2-1},$$

把它代入第一个方程得：

$$y\left(\frac{y}{y^2-1}+y\right)=3y-\frac{y}{y^2-1},$$

由此，

$$y^3-3y^2+4=0,$$

$$(y-2)^2(y+1)=0.$$

由于 $y>0$，这个方程有唯一的（重）根 $y=2$. 因此，弦 BC 与圆的直径重合. 这样一来，弹子的三种轨迹（一条直线和两条折线）的长度都相等的初始位置不存在.

92. 设岛的半径等于 1. 作外切于圆的正方形（图 104），我们只需考察 1/8 个圆. 用下述方法把圆扇形 OAB 变换为 $\triangle OAC$.

把扇形的坐标为 (φ, r) 的点 P 与 $\triangle OAC$ 的坐标为 (x, y) 的点 P' 相对应，使

$$x=r, \qquad y=\frac{4}{\pi}\varphi r,$$

这里，

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}, \qquad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

在这个变换下，扇形的弧 AB 上的所有点 $(1, \varphi)$（极坐标）被转换为直角坐标是 $x=1$，$y=(4/\pi)\varphi$ 的点，并且，当 $\varphi=0$ 时得 $x=1$，$y=0$，当 $\varphi=\pi/4$ 时，$x=1$，$y=1$. 因而，AB 弧变换为线段 AC. 如此，在上述变换下，岛的海岸线成为正方

形的边界. 此外，对固定的φ_0，极坐标为(φ_0, r) $(0\leqslant r\leqslant 1)$的所有点转换为直角坐标是$x=r$，$y=(4/\pi)\varphi_0 r$的点，即直线$y=(4/\pi)\varphi_0 x(0\leqslant x\leqslant 1)$. 扇形元素$S_1$，$\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$，$r_1\leqslant r\leqslant r_2$,被变换为梯形$S_2$，$(4/\pi)\varphi_1 x\leqslant y\leqslant(4/\pi)\varphi_2 x$(图106).

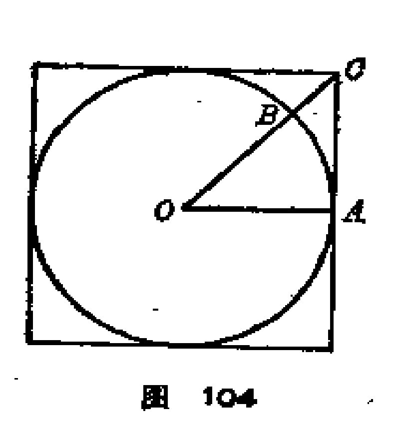


图 104

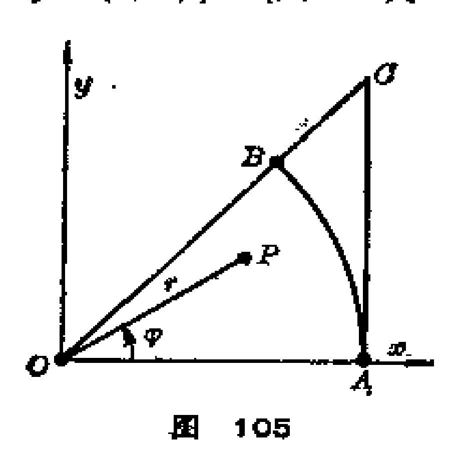


图 105

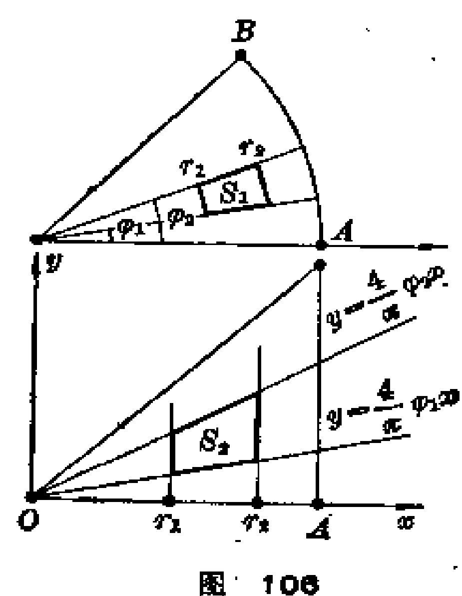


图 106

仍用S_1、S_2表示扇形元素和梯形的面积，得

$$S_1=1/2(\varphi_2-\varphi_1)(r_2^2-r_1^2),$$

$$S_2=\{[(4/\pi)\varphi_2 r_2-(4/\pi)\varphi_1 r_2]+[(4/\pi)\varphi_2 r_1-(4/\pi)\varphi_1 r_1]\}(r_2-r_1)/2.$$

经过不复杂的变形，S_2 的表达式可化为

$$S_2=\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)(r_2^2-r_1^2).$$

从而，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi}{4}.$$

这样，上述变换保持固定比例.

93. 我们考虑三次比赛. 这三次比赛中，运动员 A、B、C 以下列次序冲过终线：ABC，BCA，CAB.

在两次比赛(第一和第三次)里 A 赢了 B，在两次比赛里(第一、二次) B 胜过 C，在两次比赛（第二、三次）里 C 超过 A. 这样，只要在整个运动季节里比赛的结果如上述三次一样，本题的条件就成立了.

94. 八个选手抽签实际上可以如下进行. 把各个选手按他们随意抽出的号码排成一列. 在第一轮，第一号选手与第二号比赛，第三号与第四号比赛，第五号与第六号比赛，第七号与第八号比赛. 头两组的获胜者组成第二轮比赛的第一组，另两组的得胜者组成第二轮的第二组. 最后，在第三轮里，由第二轮的两个胜利者比赛. 根据问题条件，每个选手有完全确定的能力，因此随便哪一次比赛的结果都可预测. 能力是第二位的选手 B 只会在与能力最强的选手 A 相遇时输掉. 因而，只有他与 A 在第三轮相遇时，才会得到第二名. 为了做到这一点，需要在抽签时 A 抽出的号码不大于 4，B 的号码不小于 5（或者反过来）.

8 个选手中能力最强的两个人抽签，有 $7\cdot 8$ 种不同的结果. 第一个选手抽签时可以取 8 个号码中任何一个，抽第二个号码时，为了使选手 A 和 B 只在决赛中相遇，只能有四种抽法. 因而，在两个最强的选手抽签的 $7\cdot 8=56$ 种结果中，只有

$3\cdot4=32$ 种情形由 B 得到第二名，所求的概率等于 $32/56=4/7$.

这个问题不难推广到有 2^n 个选手的情形.

95. (1) 如果抽签用淘汰制，那末为使第二名确由选手中能力次强的选手获得，两个最强选手之一应抽第 5 号. 这个事件的概率等于下列事件的概率之和.

(a) 两个最强选手中第一个抽签的人抽第 5 号；

(b) 两个最强选手中第一个抽 1, 2, 3 或 4 号，而第二个人抽第 5 号.

第一个事件的概率等于 $1/5$, 第二个事件的概率是 $4/5\cdot1/4=1/5$, 因而，所求的概率等于 $2/5$.

(2) 不过，安排"空额"的最正确的方法应该是另一种，例如，这样安排：抽签后在第四、六、八位. 这时，第一轮比赛仅成为两个选手(第一和第二号)的一次比赛，在第二轮有两次比赛，第三轮有一次. 这样，每个决赛参加者得以至少与一个选手较量. 如果在抽签以后空额在秩序表的末尾，那末会出现这样的情况：最弱的选手在一、二轮轮空而一下子就进入决赛. 不难计算，抽签后空额出现在第四、六、八位时，实力是第二位的运动员得到第二名的概率等于 $3/5$. 五个选手排列在五个位子(第 1, 2, 3, 5, 7 号)有 $5!$ 种方法，下列抽签的结果可以认为是好的.

(a) 最强的选手抽了第 1, 2, 3 号，次强的抽了 5 或 7 号；

(b) 最强的在第 5 或 7 号，次强的在 1, 2 或 3 号.

在这两种情况里，其余的选手可以抽这两个人抽剩的任何号码. 因而，好的抽签结果的总数等于 $3\cdot2\cdot3!+2\cdot3\cdot3!$, 所求的概率等于

$$\frac{3\cdot 2\cdot 3!+2\cdot 3\cdot 3!}{5!}=\frac{3}{5}.$$

(3) 假使空额与选手一样地参加抽签，则所求的概率与第 94 题一样，即 4/7.

(4) 我们再考虑一种抽签方法．先抽一次签确定第一轮比赛的各对选手（抽签规定五个选手的次序，并添写三个空额；在第一轮里 1 与 2，3 与 4 比赛，5 号轮空），然后，仍通过抽签在第一轮的获胜者中确定第二轮比赛的各对．能力次强的运动员 B 进入第二轮的概率，正是他在第一轮不与最强选手 A 比赛的概率．这发生在下列情形：

(a) A 抽 1 或 2 号，B 抽 3，4 或 5 号；

(b) A 抽 3 或 4 号，B 抽 1，2 或 5 号；

(c) A 抽 5 号，B 抽 1，2，3 或 4 号．

1～5 号选手的全排列等于 5!，而对应于(a)、(b)、(c)的抽签的好结果，分别有 $2\cdot 3\cdot 3!$、$2\cdot 3\cdot 3!$ 和 $1\cdot 4\cdot 3!$ 种（在这三种情形里，其它选手的分布都是随意的）．因而，B 是第一轮比赛优胜者之一的概率是

$$\frac{2\cdot 3\cdot 3!+2\cdot 3\cdot 3!+1\cdot 4\cdot 3!}{5!}=\frac{4}{5}.$$

如果 B 在第一轮获胜，则在第二轮里有两个最强的选手 A、B，一个较弱的选手以及一个空额．随着抽签的不同结果，B 或者与较弱的选手比赛，或者与 A 相遇，或者轮空．这三种情形里，有两种 B 能进入决赛而得到第二名．因而，如果 B 已在第一轮获胜，那末他在第二轮获胜的概率是 2/3．这样，B 成为第二名的概率是 $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$．这是本题的又一种解答．

96．解法 1．设 n 是选手数．由条件知道，比赛场次也是 n，每一场有四个选手参加，因此比赛人次共 $4n$．由于选手数

是 n，而且他们每个人参加的比赛场数一样多，所以每个选手参加 $4n/n=4$ 场比赛. 在这四场比赛里，他每次与三个不同的对手较量，因而所有的选手共 13 个，比赛也是 13 次.

这样，煤渣跑道竞赛爱好者从熟人那里得到的信息是完全的，因为这些信息使他能确定选手数和竞赛场次都是 13. 但是，这些信息对确定各场竞赛的选手组成是不够的.

事实上，从 1 到 13 把选手编号，那末 13 个选手参加 13 场竞赛的两种不同的秩序表如下(各种可能的秩序表的总数要大得多)：

场　次	选　手	选　手
I	1, 2, 3, 4	1, 2, 5, 8
II	1, 5, 6, 7	1, 3, 6, 9
III	1, 8, 9, 10	1, 4, 7, 10
IV	1, 11, 12, 13	1, 11, 12, 13
V	2, 5, 10, 12	2, 3, 10, 12
VI	2, 6, 8, 13	2, 6, 4, 13
VII	2, 7, 9, 11	2, 9, 7, 11
VIII	3, 5, 9, 13	5, 3, 7, 13
IX	3, 6, 10, 11	5, 6, 10, 11
X	3, 7, 8, 12	5, 9, 4, 12
XI	4, 5, 8, 11	8, 3, 4, 11
XII	4, 6, 9, 12	8, 6, 7, 12
XIII	4, 7, 10, 13	8, 9, 10, 13

解法 2. 设 n 是选手数. 若每个选手与其它人只在一场比赛中相遇，且在每场比赛中只有两个选手出发，那末竞赛应进行

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

场. 但实际比赛中每场有 4 个选手出发，可组成六对不同的

选手. 因为

$$C_4^2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6,$$

所以实际竞赛场次是两人一对出发场次的 1/6, 即

$$\frac{n(n-1)}{12}.$$

由题设条件, 竞赛场次是 n, 因此

$$\frac{n(n-1)}{12}=n.$$

解之, 得 $n_1=0$, $n_2=13$. 满足问题条件的唯一的解是 $n=13$.

这个问题可以推广到每次比赛有 k 个选手的情形. 仿上讨论, 若每场竞赛只有两个选手, 且每个选手与自己的对手只比赛一场, 那末竞赛应进行

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

场. 但实际比赛中每场有 k 个选手, 或

$$C_k^2=\frac{k(k-1)}{1\cdot2}$$

对不同的选手, 因此比赛总场次要减小 $\frac{k(k-1)}{1\cdot2}$ 倍, 即进行

$$\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$$

场. 从方程

$$\frac{n(n-1)}{k(k-1)}=n,$$

得 $n=0$ 或 $n=k(k-1)+1$.

为了确定有多少个选手参加竞赛, 以及进行了多少次竞赛, 知道选手数与比赛场数一样多, 以及每场比赛有 k 个选手就够了.

97. 本题并不如初看起来那么简单. 在《数学》杂志上刊登过下列解答.

"如果随便怎么选择初始位置,国王都不能从棋盘的左边走到右边,那末在第 i 条横排上,每一个布了地雷、但不与其它布了地雷的格子邻接的格子,应该与第 $i-1$ 和 $i+1$ 条横排的布了地雷的格子有公共边. 因此,我们总能指出埋有地雷的格子,它们象骨牌一样地分布,形成棋盘上、下横排之间的'桥梁'(见图107,在这个图上只画了某些埋有地雷的格子. 除此之外,在盘上还可以有其它埋有地雷的格子). 为了使车沿埋有地雷的格子从棋盘的上边走到下边,象图 107 这样的分布是充分必要的,所以,本题的正反两个结论都已被证明."

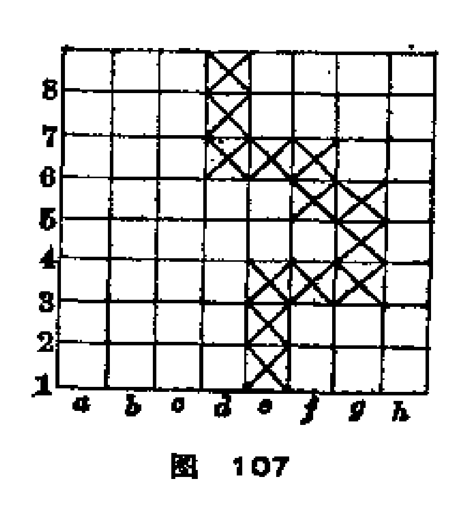


图 107

问题的提出者史坦因豪斯教授否定了这个解答.

"这个解答",史坦因豪斯致《数学》杂志编辑部的信说,"实质上不是别的,而正是同义重复,以明显的方式直观地重复了问题的条件和结论. 所作的论证只不过使我们确信问题的结论的正确性,而远不是严格的证明. 特别是,在发表的解答中引用了下述'引理':'如果随便怎么选择初始位置,国王都不能从棋盘的左边走到右边,那末在第 i 条横排上,每一个布了地雷、但它不与其它布了地雷的格子邻接的格子,应该与第 $i-1$ 和 $i+1$ 条横排的布了地雷的格子有公共边'. 但若在图 107 里,我们还在 $b5$ 埋了地雷,那末'引理'就错了. 事实上,问题就在于可以证明,即使我们在一些孤立的格子埋了

地雷，国王也不可能从棋盘的左边走到右边．在设法证明了这个结论以后，我们还要证明，阻碍国王的这组格子，形成棋盘上、下边之间的‘桥梁’．

编辑部对刊登的解答评定为3分．我似乎觉得，这显然定得太高，不过，对这个问题的完整的解答完全可以定为20分”．

完全承认问题提出者的正确性，《数学》杂志编辑部把本题的完整的解答定为20分，但……解答并没有随之而出现．也许本书的读者自己会提出能评到20分的解答．

98． 我们要写出，车在棋盘上的一种满足条件1～4的放法．

为简单起见，引进下列术语．我们约定：若在某条直行上没有放车，并且至少有一个白格不受棋盘上任何一个车的攻击，则称这条直行是自由的．若在某条直行上放有一个车，它沿横排不受棋盘上任何一个车的攻击，则称这样的直行为被占用的．没有车的横排叫自由的．

在空棋盘上，自由直行数等于自由横排数．我们在每条直行上面写下此行的白格数，并且按这些数从小到大的次序，在相应的直行上放车．当两个数相等时随便在哪条上先放．这样做了以后，如果我们能把车放在所有直行上，那末条件1～4似乎是可以成立的．例如，象图108那样配置．白格上的圆圈表示车，圆圈里的数字表示放车的次序．显然，对于图108上的棋盘来说，解法不是唯一的．

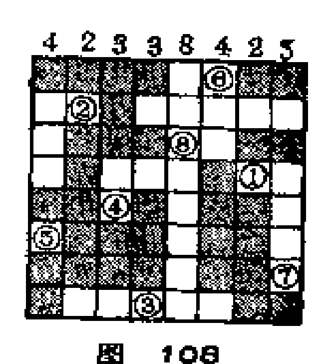


图 108

但是，对于某些棋盘来说，用刚才所说的方法会产生困难．

(1) 放了一个或几个车后，我们会发现，还没有放车的某条(或一下子几条)直行的所有白格，沿横排处于已经放了的车的攻击之下．在这样的直行上，放上新的车将违反条件3.

为解决这个问题，我们尝试把一个已经放好的车，移动到同一直行的另一白格上．如果这种办法成功了，我们就可以毫无困难地再在盘上放一个车．例如，在图 109(1) 上就出现了上面所说的困难，放了四个车后，直行 *d*、*e* 上所有的白格都处在沿横排的攻击之下．因此，我们找一条已经放了车，但还有白格不在其它车沿横排攻击之下的直行，例如 *g*．把车 2 移到 *g*5 (图 109(2))，我们能在直行 *d* 上，把第五个车放在 *d*4．然后把车 3 移到 *b*8，就能在直行 *e* 上放第 6 个车．放最后两个车不会有多大困难．最终的局势见图 109(3)．

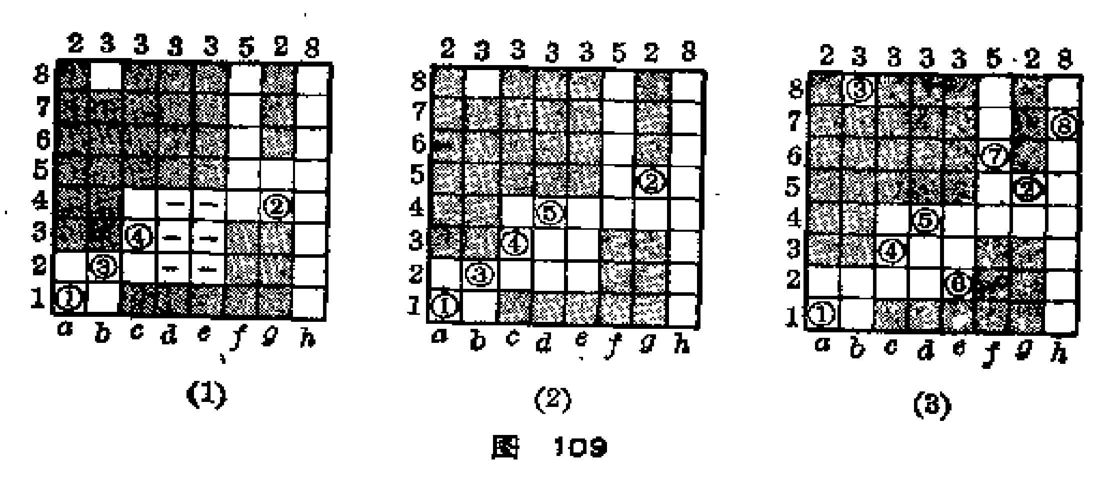


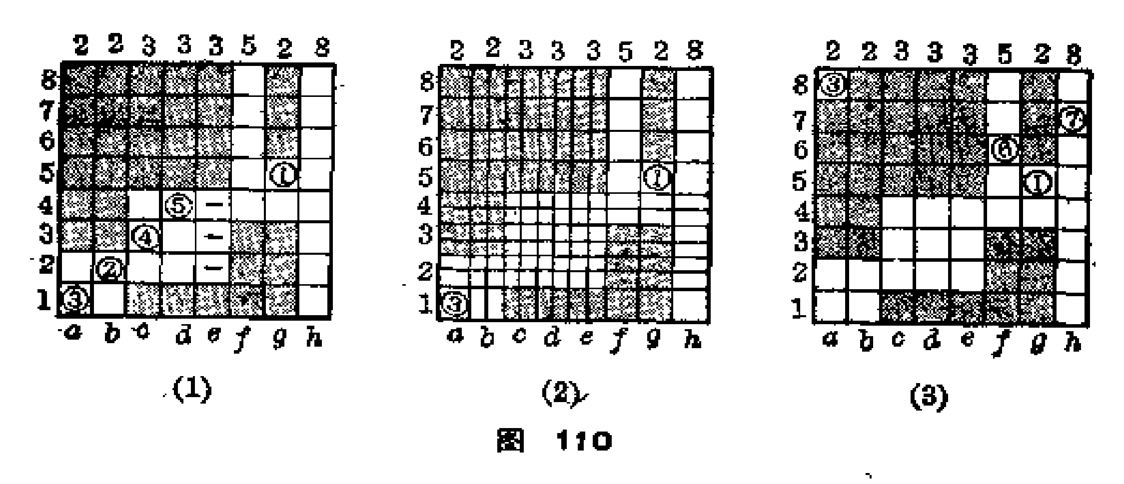
图 109

这样，如果我们遇到，只要沿直行移动已经放好的车就能解决的困难，那末车总能不违反条件 1～4 地分布着．

(2) 但还会产生另一类困难．在一条(或几条)直行上，每个白格都沿横排被攻击，而在已被占用的直行上也没有自由的白格．所有白格沿横排处在其它车攻击之下的直行，叫做被封锁的，相应的局势叫第一类封锁．在被封锁的直行上

放置车的话，总要违反条件 3． 同时，我们又不能沿直行移动已经放好的车，因为相应的直行没有自由白格．

这种困难，可以用下面的例子说明的方法解决．图 110(1) 出现了这样的情形：直行 e 被封锁，它的所有白格沿横排处在车 2、4、5 的攻击之下，而在被车 2、4、5 占用的直行上没有自由的白格．我们从棋盘上把封锁直行 e 的白格上的车拿掉，而且下面我们不再把车放在被封锁的直行，以及拿掉车的直行和横排上（在这个例子里是直行 b、c、d、e 及横排 2、3、4；在图 110(2) 上它们已被划去）．我们指出，被封锁的横排数总小于被封锁的直行数，而且，被封锁的直行和自由横排相交处的格子是黑的．所以，不必担心继续放车时，在被封锁的直行上，会出现沿横排被新放上的车攻击的白格．



(1)　　(2)　　(3)

图 110

也可能出现这样的情形：在被封锁的直行上有一些白格，它们沿横排不是受我们拿去了的那些车的攻击，而是受另一些原来放在棋盘上的车的攻击．根据条件 4，这些格子应该沿直行受某个车的威胁，但在划去的直行上我们不能放新的车．这种情形叫第二类封锁．在我们考虑的例子里(图 110)，车 3 沿横排攻击 $b1$．有两种方法排除第二类封锁．首先要看

一看，放着封锁的车的直行和没有去掉的、自由的横排相交的地方有没有白格．如果有，就试一试，把封锁的车移到其中之一上去，然后继续把车放到盘上．如果没有自由的白格，那末就把封锁的车所在的直行和横排划去．换句话说，我们从盘上不仅拿去引起第一类封锁的车，而且拿去引起第二类封锁的车．在这个例子里(图 110)，第二类封锁可以通过把车 8 移到 $a8$ 而排除．如果 $a8$ 是黑的，我们应该把直行 a 和横排 1 划去．无论在哪种情形，放其它的车都不会产生什么困难．

排除了第二类封锁，并且划去了相应的横排和直行后，我们继续放车．如果继续放时仍发生第一、二类封锁，则仍如上面所举的例子一样地排除掉．

现在证明，上面所说的把车放到棋盘上去的方法，总能使我们至少找到一种满足本题条件的布局．

首先指出，如果我们总可以把车放在白格数不超过其它自由直行的自由直行上，那末最后一个车将放在只有白格的直行上．在这样的直行上，车总可以放上去，与是否遇到上面说的两类封锁无关．

如果在安排前面的车时，不产生第一和第二类封锁，那末在棋盘上放最后一个车时，应当已经放了 $n-1$ 个车，而且每个车放在一条横排和一条直行上．因而，只有一条横排和一条直行仍然是自由的．由于有一条自由直行仅以白格填满，所以无论什么都不会妨害我们，把最后一个车放在这条直行与自由横排相交的自由白格上．结果，棋盘上放了 n 个车，每条横排和每条直行各有一个．显然，这样的车不互相攻击．此外，没有被车占用的格子，既处在沿横排的攻击之下，又处在沿直行的攻击之下．这样一来，车的这种分布满足本题条件．

现在假定，配置车后，产生了第一或第二类封锁．划去相

应的横排和直行，以及由棋盘上留下的“碎块”构成新的棋盘之后，我们得到一个横排比直行长的矩形．这样，把最后一个车，放在只由白格组成的直行上，不会封锁任何一条直行，因为每条直行上已经放了车，每一个没有去掉又没有被占用的格子，处在沿直行的攻击之下．

仅由白格组成的直行不可能被封锁，因为在棋盘上，最多可配置沿横排威胁这条直行的 $n-1$ 个白格的 $n-1$ 个车．因而，我们总能把最后一个车，放在这条直行的沿横排不受任何一个车攻击的白格上．

注意：把上述解法应用于直行数小于横排数的棋盘，也满足本题的条件．

99．如果把转动棋盘及关于纵、横对称轴反射而出现的不同局势，看作一种的话，那末按本题条件，把 4 个棋放在十六格棋盘上，只能有唯一的一种方法．转动和反射总共可得四个棋子的八种不同的摆法，其中四种见图 111．

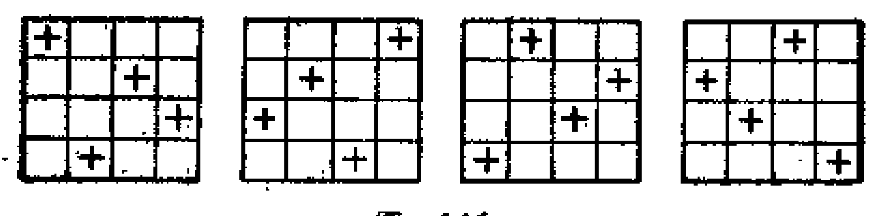


图 111

把图 111 所示的四种摆法如图 112 那样分布，我们得到 16 个棋子，在空间棋盘小方块里的摆法是，在任何一层里，在每条直行和横排上恰好放了一个棋子（主对角线上不是这样）．

可以证明：把 16 个棋子放在 $4\times4\times4$ 的三维棋盘的小方块里，使各层的任何一条直行、横排以及主对角线上，都恰好有一个棋子的问题是无解的．

100．首先，我们把注意力集中在三维棋盘上，不可能放

置65个车而没有一个不受其它车的攻击．事实上，如果能这样地放置，那末在水平的某一层内应该至少有九个车．但水平层可以看作普通的8×8的棋盘.在这样的棋盘上，不可能放9个车而使其中任何两个都不互相攻击．至少在一条横排或一条直行上一定会出现两个车，因而它们是互相攻击的．

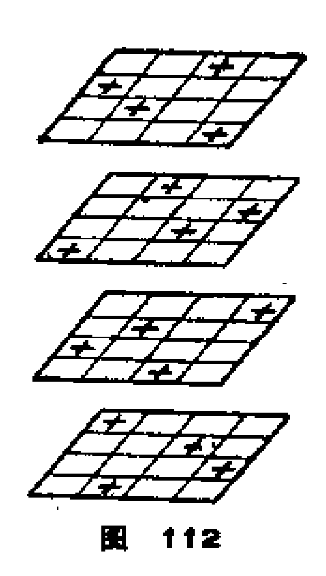


图 112

本题的解归结为使八层水平层上，每一层都放8个互不攻击的车，并且每一纵列（从上到下的小方块）上也恰好只有一个车．

我们把放在第i（$i=1, 2, \cdots, 8$）水平层上的车，叫做第i族车，那末上述问题可以这样地提出：用8族车（每族有8个）填满普通的棋盘，使每个车都不在同一族车的攻击之下．

同样地，本题的解等价于把八个数1, 2, 3, …, 8排列成8×8的正方形表，使这些数在每一行每一列里出现且仅出现一次．例如：

1	2	3	4	5	6	7	8	5	6	7	8	4	3	2	1
2	3	4	5	6	7	8	1	6	5	8	7	3	4	1	2
3	4	5	6	7	8	1	2	7	8	5	6	2	1	4	3
4	5	6	7	8	1	2	3	8	7	6	5	1	2	3	4
5	6	7	8	1	2	3	4	4	3	2	1	5	6	7	8
6	7	8	1	2	3	4	5	3	4	1	2	6	5	8	7
7	8	1	2	3	4	5	6	2	1	4	3	7	8	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	8	7	6	5

显然，这样的表可以构造很多个，例如，把上面表里的行或列重排．